

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité: Mécanique non linéaire et Chronométrie

par

Sophie ROUSSEAU

— * — * —

**SENSIBILITE A LA PRESSION DE
LIGNES A ONDES DE SURFACE:
ETUDE D'UN CAPTEUR A QUARTZ**

— * — * —

Soutenue le 28 mars 1980, devant la Commission d'Examen :

MM

R. CHALEAT
P. HARTEMANN
R. BESSON
J.J. GAGNEPAIN
D. HAUDEN

Président
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0010

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité: Mécanique non linéaire et Chronométrie

par

Sophie ROUSSEAU

— * — * —

**SENSIBILITE A LA PRESSION DE
LIGNES A ONDES DE SURFACE:
ETUDE D'UN CAPTEUR A QUARTZ**

— * — * —

Soutenue le 28 mars 1980, devant la Commission d'Examen :

MM

R. CHALEAT
P. HARTEMANN
R. BESSON
J.J. GAGNEPAIN
D. HAUDEN

Président
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Examinateur

THÈSE

Présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DE
L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES-BOITE

Pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

Spécialité : Mécanique non linéaire et Géométrie

par

SOPHIE ROUSSEAU



SENSIBILITÉ A LA PRESSION DE

LIGNES A ONDES DE SURFACE

ETUDE D'UN CAPTEUR A QUARTZ

Soutenue le 28 mai 1990 devant la Commission d'Examen :

Président
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Examinateur

R. CHATEL
R. HARTMANN
R. BISSON
J.L. GAGNEPAIN
D. HAUDEN

MM

UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE BESANCON

Président : Monsieur le Professeur Pierre LEVEQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN : M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

PRESIDENT HONORAIRE : M. Jean THIEBAUT

DOYENS HONORAIRES : MM. BERNARD,
CHATELET, GLANGEAUD, JACQUEMAIN,
THIEBAUT.

ASSESSEURS :

- M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique
- M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biologie animale. Ecologie

PROFESSEURS HONORAIRES :
MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE,
QUANTIN, THEOBALD N, THIRY, TRILLAT,
TRONCHET, UEBERSFELD.

PROFESSEURS

MM.

BANTEGNIE Robert : Mathématiques
BENILAN Philippe : Mathématiques
BERNARD Jean : Chimie Physique
BIDAULT Michel : Taxonomie expériment.
BROQUET Paul : Géologie
BRUCKERT Sylvain : Ecologie végétale
BULABOIS Jean : Physique générale optique
CAPODANNO Pierre : Mécanique théorique
CERUTTI Ernest : Chimie appliquée
CHALEAT Raymond : Mécanique appliquée
CHARDON J. Claude : Spectroscopie
CHAUVE Pierre : Géolog. minéralogie
COUGNARD Jean : Mathématiques
DEVIN Claude : Chimie 1er cycle
DUBOUCHET Jacques : Physiologie végétale
GALATRY Louis : Physique moléculaire
GAUDEMER Yves : Biochimie
GOMOT Lucien : Zoologie-embryologie
GOUARNE René : Mathématiques
GRAS Georges : Mathématiques
GREMILLARD Jean : Mathématiques
KARCHE J. Paul : Pétrographie Minéral.
LALLEMENT Gérard : Mécanique appliquée
LAUDE Bernard : Chimie organique
LESAINT Pierre : Mathématiques I
LHOTE François : Automatique
MERIGOUX Henri : Cristallographie et
Synthèses minérales

MIELLOU J. Claude : Analyse numérique
MILLET Bernard : Botanique
MONTAGNER Hubert : Psychophysiologie
MOREELS Guy : Astronomie
OLIVIER Marcel : Electronique quantique
PARIZET Jean : Mathématiques
PERROT Roger : Chimie générale
PLUVINAGE Philippe : Physique théorique
POTIER Robert : Physique des sols
RANGHEARD Yves : Géologie
REAL Pierre : Ecologie animale
RIPPLINGER Jean : Physiologie animale
ROBERT Daniel : Physique
ROBERT Guy : Electrochimie
ROBERT Jacques : Mathématiques I
THEOBALD J. Gérard : Spectroscopie hertz.
THIEBAUT Jean : Pétrogr. minéralogie
TREHEL Michel : Informatique
VERNEAUX Jean : Zoologie-Embryologie
VIENOT J. Charles : Physique générale optique
WEIL Michel : Mathématiques

Responsable des services administratifs

M. Jean-Marie RUNGE

Je remercie Monsieur le Directeur du Laboratoire Central de Recherches de la THOMSON-C.S.F., pour m'avoir autorisée à préparer une thèse en liaison étroite avec le Laboratoire d'Acoustoélectricité et Magnétisme.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Directeur Général du Centre National de la Recherche Scientifique qui m'a permis d'effectuer cette étude au Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs.

Je tiens à exprimer ma gratitude à chacun des membres du Jury qui ont accepté d'examiner ce travail :

- Monsieur CHALEAT, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques qui me fait l'honneur de présider ce Jury.

- Monsieur HARTEMANN, Responsable du Laboratoire d'Acoustoélectricité et Magnétisme qui a proposé le sujet de cette thèse. Notre collaboration m'a été très précieuse pour mener à bien ce projet.

- Monsieur BESSON, Professeur à la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon, qui a manifesté un grand intérêt pour mon travail.

- Monsieur GAGNEPAIN, Directeur du Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs qui m'a accueillie au sein du Laboratoire et guidée tout au long de cette recherche.

- Monsieur HAUDEN, Maître-Assistant à l'I.U.T. de Belfort qui a constamment suivi mes travaux et a largement contribué à la réalisation de cette étude.

Je remercie l'ensemble du personnel du L.P.M.O. qui a participé à ce travail, notamment Monsieur COQUEREL pour la mise au point des dispositifs à ondes de surface et Monsieur GRAND qui s'est occupé de la partie électronique, ainsi que les personnes du L.C.R. avec lesquelles j'ai travaillé lors de mes stages à Corbeville.

Je n'aurai garde d'oublier l'accueil sympathique du personnel du Centre de Calcul, qui a toujours fait son possible pour m'aider lors des difficultés techniques rencontrées en Informatique.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce mémoire, notamment Messieurs MARIANNEAU, PAULIN, PLANAT, BONJOUR et Madame HISLEUR qui s'est chargée avec compétence de la dactylographie.

SOMMAIRE

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>1ÈRE PARTIE : ÉTUDE THÉORIQUE</u> =====	3
<u>CHAPITRE I - ÉQUATIONS GÉNÉRALES NON LINÉAIRES DES ONDES DE</u> <u>SURFACE, PROPAGATION EN MILIEU PERTURBÉ</u>	5
A - EQUATIONS GENERALES NON LINEAIRES	6
1°) <i>Déplacements</i>	6
2°) <i>Déformations</i>	6
3°) <i>Efforts</i>	7
4°) <i>Equations d'équilibre</i>	8
B - PROPAGATION EN MILIEU PREDEFORME	11
1°) <i>Définitions</i>	11
2°) <i>Equations d'équilibre</i>	12
3°) <i>Détermination des cstes élastiques modifiées</i>	14
C - RESOLUTION PAR UNE METHODE DE PERTURBATION	15
1°) <i>Equations d'équilibre et conditions aux limites</i>	15
2°) <i>Variation relative de vitesse de l'onde</i>	16
3°) <i>Cas des ondes de Rayleigh</i>	18
D - PROGRAMME DE CALCUL	23

CHAPITRE II - MÉTHODE DE CALCUL DES PRÉDÉFORMATIONS	27
A - EQUATION VARIATIONNELLE D'EQUILIBRE	28
B - EXPRESSION DES DEFORMATIONS	30
C - RELATION EFFORTS-DEFORMATIONS	31
CHAPITRE III - MODÉLISATION D'UN CAPTEUR DE PRESSION	35
A - LAME MASSIVE DE QUARTZ	36
1°) Etude théorique	36
2°) Résultats expérimentaux	38
B - MEMBRANE CIRCULAIRE	40
1°) Cas du plan (a_1, a_2)	43
2°) Cas d'un plan quelconque P' passant par M	47
2ÈME PARTIE : ÉTUDE EXPÉRIMENTALE	57
=====	
CHAPITRE I - GÉNÉRALITÉS	59
A - ASPECT TECHNOLOGIQUE	60
1°) Fabrication des membranes	60
2°) Les contacts électriques	62
3°) Les dispositifs de mesure	64
B - INTERPRETATION DE LA THEORIE	67

CHAPITRE II - MEMBRANES COMPORTANT UNE SEULE LIGNE À RETARD 69

A - CAPTEURS COMPORTANT 1 MEMBRANE ET 1 SEULE LIGNE A RETARD	70
1°) <i>Influence de la pression</i>	70
2°) <i>Caractéristique fréquence-température pour une membrane</i>	74
B - CAPTEURS A 2 MEMBRANES ET 2 LIGNES	77

CHAPITRE III - CAPTEURS À UNE MEMBRANE ET DEUX LIGNES

A - CAS D'UNE MEMBRANE RECTANGULAIRE	84
B - CAS D'UNE MEMBRANE CIRCULAIRE	87
1°) <i>Influence des caractéristiques de la ligne</i>	90
2°) <i>Influence de la coupe</i>	98

<u>CONCLUSION</u>	101
-------------------	-----

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

-oOo-

Les caractéristiques d'une onde de surface, et en particulier sa vitesse de phase, sont modifiées par l'effet de grandeurs mécaniques telles que pression hydrostatique (1), accélération (2) ou force (3). Ce phénomène résulte du couplage, créé par la non linéarité du cristal, entre l'onde et la perturbation extérieure. En général, ces phénomènes sont indésirables car ils sont, avec la température, la principale cause de l'instabilité de fréquence des oscillateurs à ondes de surface. Cependant, en rendant les dispositifs sensibles de façon sélective à une grandeur physique particulière, ils peuvent être avantageusement utilisés pour réaliser des capteurs. La grandeur sensible étant la fréquence du dispositif, ils sont bien adaptés au traitement numérique du signal. En effet, par suite des progrès réalisés dans le domaine des composants microélectroniques et du développement des microprocesseurs, des chaînes électroniques sont de plus en plus utilisées pour exploiter les informations fournies par les capteurs et pour contrôler le fonctionnement de dispositifs plus complexes.

En conséquence, un nouveau type de capteurs, permettant de déterminer une pression par l'intermédiaire d'une mesure de la fréquence d'un oscillateur à ondes élastiques de surface a été étudié. L'onde se propage à la surface d'une membrane de quartz qui se déforme sous l'action de la pression. La résolution du dispositif dépend des paramètres géométriques, qui sont la forme et les dimensions de la membrane, la position des transducteurs, et des paramètres physiques tels que la coupe cristalline et la direction de propagation de l'onde.

Le choix s'est porté sur une membrane circulaire, d'une épaisseur de quelques centaines de microns. L'optimisation des autres paramètres a été réalisée à l'aide d'un modèle théorique qui décrit avec une bonne précision le comportement du capteur.

L'étude a été effectuée simultanément et en coordination, dans deux laboratoires différents : le Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs (C.N.R.S.) de Besançon et le Laboratoire Central de Recherches de la Thomson-C.S.F. à Corbeville (4).

Les aspects théoriques et fondamentaux, qui sont l'objet principal de ce mémoire, ont été traités au L.P.M.O.. Les études expérimentales, les réalisations technologiques et pratiques ont été effectuées au L.C.R.

Ce mémoire est constitué de deux parties :

La première partie, essentiellement théorique, comprend l'étude de la propagation d'une onde de surface en milieu perturbé, ainsi que la présentation d'une méthode générale de détermination de la prédéformation et des variations de fréquence. Ces modèles sont alors appliquées aux différentes configurations de capteurs envisagées.

Dans la seconde partie, sont présentés les résultats expérimentaux obtenus par les mesures effectuées au L.C.R. et au L.P.M.O. Ils sont comparés aux prévisions théoriques.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE THÉORIQUE

CHAPITRE I

ÉQUATIONS GÉNÉRALES NON LINÉAIRES DES ONDES DE SURFACE.

PROPAGATION EN MILIEU PERTURBÉ

-oOo-

On se propose tout d'abord de rappeler les équations générales élastiques en régime non linéaire (5) et de les appliquer au cas de la propagation dans un milieu soumis à une perturbation statique. On montre que les équations d'équilibre font apparaître des coefficients élastiques modifiés caractérisant le couplage onde-perturbation. On décrit alors une méthode de perturbation en la développant plus particulièrement dans le cas des ondes de RAYLEIGH.

A - EQUATIONS GENERALES NON LINEAIRES

Dans un repère orthogonal $Ox_1x_2x_3$, un point quelconque M du solide, de coordonnée a_i dans l'état initial, se déplace sous l'action d'une déformation et vient en P de coordonnées x_i dans un état final.

1°) DEPLACEMENTS

Soient u_i les composantes du déplacement mécanique de l'état initial à l'état final.

$$\boxed{u_i = x_i - a_i} \quad \text{I-1}$$

2°) DEFORMATIONS

On considère deux points voisins M (a_i) et M' ($a_i + da_i$). La distance MM' entre ces deux points dans l'état initial est telle que :

$$\overline{MM'}^2 = da_i da_i = ds_0^2 \quad \text{I-2}$$

Dans l'état final, les deux points sont respectivement en P (x_i) et P' ($x_i + dx_i$) et la distance correspondante est donnée par :

$$\overline{PP'}^2 = dx_i dx_i = ds^2 \quad \text{I-3}$$

La déformation η définie par rapport à l'état initial, s'écrit :

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2} \quad \text{I-4}$$

et ses composantes sont :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{dx_k dx_k - da_k da_k}{da_i da_j} \quad \text{I-5}$$

soit en introduisant les déplacements :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad \text{I-6}$$

Dans le cas de déformations infiniment petites, les termes $\frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j}$ sont négligeables et les déformations se ramènent à une expression linéaire.

Les composantes de la déformation peuvent également être exprimées dans l'état final :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{I-7}$$

3°) EFFORTS

Les efforts peuvent être exprimés par rapport à un élément de surface de l'état initial ou par rapport à un élément de surface de l'état final. Soient P_{ij} et T_{ij} les notations correspondantes. En raison de cette ambiguïté, il est nécessaire d'introduire la notion de tensions thermodynamiques t_{ij} , ou efforts définis à partir de l'énergie interne U par élément de volume initial.

$$t_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}} \right)_S \quad S : \text{entropie} \quad \text{I-8}$$

Les efforts T_{kl} exprimés dans l'état final sont reliés aux tensions thermodynamiques t_{ij} par la relation suivante :

$$t_{ij} = \det J \cdot T_{kl} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial a_j}{\partial x_l} \quad \text{I-9}$$

où J est le jacobien de la déformation :

$$J = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad \text{I-10}$$

A partir de l'expression de l'énergie interne et à l'aide de la relation (I-8), les tensions thermodynamiques t_{ij} sont exprimées sous la forme d'un polynôme fonction des puissances croissantes des déformations :

$$t_{ij} = C_{ijkl}^s \eta_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn}^s \eta_{kl} \eta_{mn} + \dots \quad \text{I-11}$$

Les coefficients C_{ijkl}^s et C_{ijklmn}^s sont respectivement les coefficients élastiques du 2e ordre et du 3e ordre définis à entropie constante.

4°) EQUATIONS D'EQUILIBRE

Soient $F_i(x_\ell)$ les forces de volume et $Q_i(x_\ell)$ les forces de surface (par unité de volume et de surface de l'état final) agissant sur un élément du solide.

$$Q_i = n_j T_{ji}$$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\iiint_{\epsilon} Q_i \, d\epsilon + \iiint_V F_i \, dV = 0 \quad \text{I-12}$$

et conduit à :

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + F_i(x_\ell) = 0 \quad \text{I-13}$$

En régime dynamique, on peut faire apparaître la force d'inertie $\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}$. L'équation d'équilibre exprimée dans l'état final s'écrit alors :

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = F_i(x_\ell) + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad \text{I-14}$$

où ρ est la masse spécifique du solide dans son état final.

Soient dA° et dA les éléments de surface du solide dans l'état initial et dans l'état final et soient dA_i° et dA_i leurs composantes respectives. Lorsque l'action est indépendante du corps déformé, il y a conservation des forces extérieures.

$$P_{ji} dA_i^\circ = T_{ji} dA_i \quad \text{I-15}$$

En remplaçant T_{ji} par sa relation en fonction des tensions thermodynamiques, il vient :

$$P_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial a_r} t_{jr} \quad \text{I-16}$$

qui est l'effort exprimé dans l'état initial, encore appelé tenseur de Piola-Kirchoff.

L'équation d'équilibre dans l'état initial, compte tenu des relations précédentes s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = F_i(x_\ell) \cdot \det J + \frac{\partial P_{ki}}{\partial a_k} \quad \text{I-17}$$

où ρ_0 est la masse volumique du solide dans l'état initial.

RECAPITULATION DES PRINCIPALES RELATIONS

Déplacements :

$$u_i = x_i - a_i$$

Déformations :

$$\text{état initial} : \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right)$$

$$\text{état final} : \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

Tensions thermodynamiques :

$$t_{ij} = \det J \cdot T_{kl} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial a_j}{\partial x_l}$$

Tenseur de Piola-Kirchoff :

$$P_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial a_r} t_{jr}$$

Relation effort-déformation :

$$t_{ij} = C_{ijkl}^S \eta_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn}^S \eta_{kl} \eta_{mn} + \dots$$

Equations d'équilibre :

$$\text{état initial} : \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \det J \cdot F_i(x_\ell) + \frac{\partial P_{ki}}{\partial a_k}$$

$$\text{état final} : \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = F_i(x_\ell) + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$$

B - PROPAGATION EN MILIEU PREDEFORME

Lorsqu'un cristal est soumis à une précontrainte statique à laquelle on superpose une déformation dynamique, trois états successifs du cristal sont à considérer :

l'*état naturel* est celui qui précède l'application de toute contrainte et déformation. Le cristal est au repos. Soient a_i les coordonnées correspondantes d'un point matériel.

l'*état initial* est obtenu après déformation sous l'action d'une précontrainte statique. Les coordonnées sont appelées x_i .

l'*état final* dans lequel une déformation dynamique (vibration) est superposée à la précontrainte statique, est défini par les coordonnées X_i .

Dans les développements, nous n'introduisons pas les termes de la piézoélectricité, leur influence étant négligeable, dans le cas du quartz, au niveau du calcul des sensibilités aux perturbations mécaniques.

1°) DEFINITIONS

déplacements :

déplacements statiques $\overline{U}_i = x_i - a_i$

déplacements dynamiques $u_i = X_i - x_i$ I-18

déplacements totaux $u_i^* = X_i - a_i = \overline{U}_i + u_i$

masses spécifiques :

ρ_0 dans l'état naturel

$\overline{\rho}$ dans l'état initial

ρ dans l'état final

efforts :

Les efforts statiques sont notés $\overline{T}_{ji}$ et soient T_{ji}^* les efforts totaux.

Ils s'expriment en fonction des tensions thermodynamiques par la relations :

$$T_{ji}^* = \frac{1}{\det J} \frac{\partial X_j}{\partial a_k} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} t_{km}^* \quad \text{I-19}$$

Les coefficients non linéaires du 3e ordre sont introduits par la relation tensions thermodynamiques-déformations :

$$t_{pk}^* = C_{pk\ell q} \eta_{\ell q}^* + \frac{1}{2} C_{pk\ell quv} \eta_{\ell q}^* \eta_{uv}^* \quad \text{I-20}$$

Les développements seront limités aux termes non linéaires du 3e ordre, les effets d'ordres supérieurs étant négligeables.

2°) EQUATIONS D'EQUILIBRE

D'après la relation (14), l'équation d'équilibre exprimée dans l'état final est :

$$\rho \frac{d^2 u_i^*}{dt^2} = F_i(X_\ell) + \frac{\partial T_{ji}^*}{\partial X_j} \quad \text{I-21}$$

Dans l'état naturel, cette même relation devient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} = \det J F_i(X_\ell) + \frac{\partial P_{ij}^*}{\partial a_j} \quad \text{I-22}$$

et dans l'état initial :

$$\frac{\rho}{\rho} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} = \frac{\det J}{\det \bar{J}} F_i(X_\ell) + \frac{\partial K_{ij}^*}{\partial x_j} \quad \text{I-23}$$

$$\text{avec } \det J = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \det \bar{J} = \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \quad \text{et} \quad K_{ij}^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial x_j}{\partial a_s} P_{is}^*$$

Le tenseur de Piola-Kirchoff P_{is}^* , qui est l'effort total défini dans l'état naturel mis en jeu lors du passage de l'état naturel à l'état final du solide, est fonction des déformations totales $\partial X_k / \partial a_m$ et donc de la

quantité $(\partial x_k / \partial a_m) + (\partial u_k / \partial a_m)$. Il peut s'écrire sous forme d'un développement en série, limité à ses deux premiers termes (3e ordre) :

$$P_{ij}^* \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right) = P_{ij}^* \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right) + \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \frac{\partial P_{ij}^* \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)} \quad \text{I-24}$$

La quantité $P_{ij}^* \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)$ est le tenseur de Piola-Kirchoff défini lors du passage de l'état naturel à l'état initial.

$$P_{ij}^* \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right) = \overline{P_{ij}} + \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \frac{\partial P_{ij}^*}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)} \quad \text{I-25}$$

Posons : $\overline{A_{ikjm}} = \frac{\partial \overline{P_{ij}}}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)}$ I-26

En reportant dans l'équation d'équilibre de l'état naturel, il vient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} = \det J \ F_i(X_\ell) + \frac{\partial \overline{P_{ij}}}{\partial a_j} + \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \right) \quad \text{I-27}$$

De la même façon, la relation d'équilibre pour les déplacements statiques $\overline{U_i}$ s'écrit dans l'état naturel :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial t^2} = \det J \ F_i(X_\ell) + \frac{\partial \overline{P_{ij}}}{\partial a_j} \quad \text{I-28}$$

Comme $u_i^* = \overline{U_i} + u_i$ alors $\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial t^2}$

l'équation d'équilibre de la déformation dynamique s'exprime par :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \det J \ F_i(X_\ell) - \det \overline{J} \ F_i(x_\ell) + \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \right) \quad \text{I-29}$$

Si les forces de volume sont dues à des accélérations constantes indépendantes des déformations, on a :

$$\det J \quad F_i(X_\ell) = \det \bar{J} \quad F_i(x_\ell)$$

L'équation d'équilibre devient :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \right)$$

I-30

$\overline{A_{ikjm}}$ sont les constantes élastiques modifiées du cristal précontraint.

3°) DETERMINATION DES CONSTANTES ELASTIQUES MODIFIEES

Reprenons les expressions de $\overline{A_{ikjm}}$ et de $\overline{P_{ij}}$ exprimées dans l'état initial :

$$\overline{A_{ikjm}} = \frac{\frac{\partial \overline{P_{ij}}}{\partial x_k}}{\frac{\partial (\frac{x_i}{\partial a_m})}{\partial a_r}} \quad \text{avec} \quad \overline{P_{ij}} = \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \overline{t_{jr}}$$

on en déduit :

$$\overline{A_{ikjm}} = \frac{\frac{\partial (\frac{x_i}{\partial a_r})}{\partial x_k}}{\frac{\partial (\frac{x_i}{\partial a_m})}{\partial a_r}} \overline{t_{jr}} + \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \frac{\frac{\partial \overline{t_{jr}}}{\partial x_k}}{\frac{\partial (\frac{x_i}{\partial a_m})}{\partial a_r}}$$

I-31

et en introduisant la relation tensions thermodynamiques-déformations, l'expression de $\overline{A_{ikjm}}$ devient :

$$\overline{A_{ikjm}} = \partial_{ik} \overline{t_{jm}} + \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \frac{\partial x_k}{\partial a_q} (C_{jpmq} + C_{jpmquv} \overline{\eta_{uv}})$$

I-32

Cette expression peut être réduite en utilisant les relations :

$$x_i = a_i + \overline{U_i} \quad \text{et} \quad \overline{t_{jm}} = \det J \quad \overline{T_{sr}} \quad \frac{\partial a_j}{\partial x_s} \frac{\partial a_m}{\partial x_r}$$

$\overline{A_{ikjm}}$ prend alors la forme :

$$\overline{A_{ikjm}} = \delta_{ik} \overline{T_{jm}} + C_{ikjm} + C_{ikjmu\nu} \overline{\eta_{uv}} + \frac{\partial \overline{C_{ikjm}}}{\partial a_p} C_{pkjm} + \frac{\partial \overline{C_{ikjm}}}{\partial a_q} C_{ikqm} \quad \text{I-33}$$

C_{ikjm} et $C_{ikjmu\nu}$ sont les constantes élastiques du 2e et 3e ordre, $\overline{T_{jm}}$ et $\overline{\eta_{uv}}$ les efforts et déformations statiques, $\overline{U_i}$ les déplacements statiques. (δ_{ik} : symbole de Kronecker). Cette expression est générale et chaque problème particulier se ramène à la détermination des expressions correspondantes des $\overline{T_{jm}}$, $\overline{\eta_{uv}}$ et $\overline{U_i}$ en fonction des contraintes extérieures.

C - RESOLUTION PAR UNE METHODE DE PERTURBATION

La contrainte extérieure appliquée au cristal (forces, pression) crée une prédéformation qui en général est inhomogène dans le volume du cristal. L'intégration directe de l'équation d'équilibre est alors difficile. Une méthode de perturbation a été développée, qui permet d'obtenir directement les variations relatives de la vitesse de propagation et de la fréquence en fonction des caractéristiques de la déformation statique (6) (3)

1°) EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS AUX LIMITES

Lorsque le milieu est soumis à une précontrainte statique, son équation d'équilibre s'écrit dans l'état naturel :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \right) \quad \text{I-34}$$

La prédéformation étant statique ou quasi statique, elle n'engendre pas de fonctions harmoniques temporelles de la vibration dynamique u_i , mais seulement des fonctions harmoniques spatiales. Les solutions u_i restent donc sinusoïdales, seule leur fréquence angulaire ω_0 sera modifiée et prendra la valeur ω . En remplaçant u_i par $u_i e^{j\omega t}$ dans l'état initial et u_i^0

par $u_i^{\circ} e^{j\omega_0 t}$ dans l'état naturel, les équations d'équilibre s'écrivent respectivement :

$$-\rho_0 \omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \right) \quad \text{I-35}$$

$$-\rho_0 \omega_0^2 u_i^{\circ} = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(C_{ikjm} \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial a_m} \right) \quad \text{I-36}$$

En toute généralité, nous pouvons dire que la fonction définissant la vibration u_i° dans l'état non déformé sera modifiée par l'application de la contrainte non seulement au niveau de sa vitesse V_0 , mais aussi de son amplitude u_i° . Les dispositifs que nous étudions, oscillateur à ligne à retard par exemple, ont des conditions d'oscillations telles que, quelle que soit la perturbation appliquée, le nombre d'ondes est conservé. Ainsi la variations de vitesse de phase est couplée à la variation de fréquence angulaire ω_0 .

Aux équations d'équilibre doivent être associées les conditions aux limites qui traduisent que la surface de propagation est libre de toute contrainte (les contraintes étant en général appliquées sur les bords latéraux du substrat).

Pour un cristal soumis à une précontrainte statique :

$$\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} = 0 \quad \text{à la surface du cristal} \quad \text{I-37}$$

et pour le même cristal libre de toute contrainte :

$$C_{ikjm} \frac{\partial u_j}{\partial a_m} = 0 \quad \text{à la surface} \quad \text{I-38}$$

2°) VARIATION RELATIVE DE VITESSE DE L'ONDE

L'équation I-35 et l'équation I-36 dont nous prenons le complexe conjugué, sont multipliées respectivement par $u_i^{\circ*}$ et u_i ($u_i^{\circ*}$ désigne la quantité conjuguée de u_i°).

Nous considérons un domaine d'intégration correspondant à un volume v du cristal limité par une surface $\mathcal{S}$ et nous intégrons l'équation I-36 sur le volume. Nous obtenons :

$$-\rho_0 \omega_0^2 \iiint_V u_i^{\circ*} u_i dv = \iiint_V u_i \frac{\partial}{\partial a_k} (C_{ikjm} \frac{\partial u_j^{\circ*}}{\partial a_m}) dv \quad \text{I-39}$$

L'équation I-35 est intégrée de la même façon :

$$-\rho_0 \omega^2 \iiint_V u_i u_i^{\circ*} dv = \iiint_V u_i^{\circ*} \frac{\partial}{\partial a_k} (\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j}{\partial a_m}) dv \quad \text{I-40}$$

En développant aux premiers ordres par rapport à ω et u_i et en introduisant les conditions limites, les relations I-39 et I-40 prennent respectivement la forme :

$$\begin{aligned} -\rho_0 \omega_0^2 \iiint_V u_i^{\circ*} u_i^{\circ} dv &= \iiint_V \frac{\partial u_i^{\circ*}}{\partial a_k} C_{ikjm} \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial a_m} dv \\ -\rho_0 \omega^2 \iiint_V u_i^{\circ*} u_i^{\circ} dv &= \iiint_V \frac{\partial u_i^{\circ*}}{\partial a_k} \overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial a_m} dv \end{aligned}$$

En retranchant membre à membre ces deux relations et en ne conservant que les termes du premier ordre en $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, il reste :

$$2\rho_0 \omega_0 \Delta\omega \iiint_V u_i^{\circ*} u_i^{\circ} dv = \iiint_V \frac{\partial u_i^{\circ*}}{\partial a_k} \overline{\mathcal{K}_{ikjm}} \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial a_m} dv \quad \text{I-41}$$

où $\overline{\mathcal{K}_{ikjm}} = \overline{A_{ikjm}} - C_{ikjm}$ intervient comme la modification des coefficients élastiques lorsque le cristal est perturbé. Cette relation est très générale et peut être utilisée pour calculer soit la variation de vitesse, soit la variation de fréquence, soit la variation du vecteur d'onde suivant les cas considérés. Elle est valable aussi bien pour les ondes de volume que pour les ondes de surface.

La vitesse V , lorsque le milieu est précontraint, s'écrit :

$$V = V_0 + \Delta V$$

Lorsque les équations sont exprimées, comme c'est le cas ici dans l'état naturel (système Lagrangien), les dimensions de la plaque sont prises

par rapport à un système d'axes fixes et leurs variations sont implicitement comprises dans le calcul des coefficients élastiques modifiés $\overline{A_{ikjm}}$.

La relation entre les variations de vitesse et de fréquence s'écrit simplement :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \quad \text{I-42}$$

La variation relative de vitesse de phase de l'onde, due à la précontrainte statique, est alors donnée par :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\iiint_V \frac{\partial u_i^{\circ*}}{\partial a_k} \overline{\mathcal{K}_{ikjm}} \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial a_m} dv}{2 \rho_0 \omega_0^2 \iiint_V u_i^{\circ} u_i^{\circ*} dv} \quad \text{I-43}$$

L'utilisation de cette relation nécessite le calcul préalable de la prédéformation statique qui est implicitement contenue dans les termes $\overline{\mathcal{K}_{ikjm}}$, par la relation I-33, ainsi que les caractéristiques de la vibration sans précontrainte correspondant à u_i° et V_0 .

3°) CAS DES ONDES DE RAYLEIGH

A partir de la relation générale I-43 que nous venons d'établir, nous allons déterminer la variation relative de vitesse dans le cas précis d'une onde de RAYLEIGH. Cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{I_2}{2 \rho_0 \omega_0^2 I_1} \quad \text{I-44}$$

Dans les intégrales I_1 et I_2 , nous introduisons les composantes u_i° de l'onde de Rayleigh non perturbée :

$$u_i^{\circ} = \sum_p A_p u_i^{\circ(p)} e^{j2\pi f_0(t - \frac{n_l^{(p)} a_l}{V_0})} \quad \text{I-45}$$

où $A_p \circ u_i^{(p)}$ sont les composantes d'amplitude des trois modes de l'onde, $n_l^{(p)}$ les cosinus directeurs pour la direction de propagation considérée, soient $n_1 = 1$, $n_2^{(p)} = q_p$, $n_3 = 0$, et V_0 est la vitesse de l'onde.

Il vient alors :

$$I_1 = \iiint_V u_i^{(p)} u_i^{(q)*} dv = \iiint_V \sum_{p,q} A_p \circ u_i^{(p)} A_q^* \circ u_i^{(q)*} e^{-i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*) a_2} dv$$

et

$$I_2 = \iiint_V \frac{\partial u_i^{(p)}}{\partial a_k} \overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \frac{\partial u_j^{(q)}}{\partial a_m} dv =$$

$$\left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \iiint_V \overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \sum_{p,q} A_p \circ u_j^{(p)} A_q^* \circ u_i^{(q)*} n_m^{(p)} n_k^{(q)*} e^{-i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*) a_2} dv$$

a) $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ indépendant de la variable d'espace a_2

La longueur d'onde λ reste suffisamment faible pour que nous puissions toujours supposer que les coefficients du tenseur $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ demeurent inchangés dans une surface λ^2 .

Les propriétés de l'onde seront donc calculées en tout point (a_1, a_3) de la surface, l'intégration étant effectuée sur toute l'épaisseur du milieu semi-infini.

Le calcul des intégrales I_1 et I_2 conduit alors à la relation donnant la variation relative de vitesse :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\overline{\mathcal{H}_{ikjm}} \sum_{p,q} \frac{A_p \circ u_j^{(p)} A_q^* \circ u_i^{(q)*} n_m^{(p)} n_k^{(q)*}}{q_p - q_q^*}}{2 \rho_0 V_0^2 \sum_{p,q} \frac{A_p \circ u^{(p)} A_q^* \circ u^{(q)*}}{q_p - q_q^*}}$$

I-46

La variation relative de vitesse de l'onde de Rayleigh se propageant sur un cristal soumis à une précontrainte statique est une valeur moyenne obtenue dans un petit domaine de la surface de propagation centré autour du point (a_1, a_3) . Elle prend par contre en compte la totalité de l'épaisseur de la plaque cristalline sous ce domaine. Pour une plaque de dimensions finies $2L$ suivant $\overrightarrow{Ox_1}$ et 2ℓ suivant $\overrightarrow{Ox_3}$, il sera nécessaire de calculer les variations $\frac{\Delta V}{V_0}(a_1, a_3)$ en différents points (a_1, a_3) de la surface, puis de déterminer la valeur moyenne sur le domaine correspondant à la longueur effective de parcours de l'onde.

b) $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ fonction de la variable d'espace a_2

En général, les effets de la précontrainte sont inhomogènes. Les efforts, déformations et déplacements dépendent alors non seulement de la position (a_1, a_3) mais aussi de la variable d'espace a_2 .

Dans le cas d'une onde de surface, la profondeur de pénétration dans le matériau étant très faible (de l'ordre de 2λ), la détermination des termes de la prédéformation peut être faite à la surface de propagation en chaque point P de coordonnées a_1, a_3 c'est-à-dire pour $a_2 = 0$.

Le calcul des termes du couplage non linéaire $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$ est alors semblable à celui exposé précédemment, en considérant toutefois les coordonnées a_1 et a_3 comme des paramètres. La valeur moyenne de la variation relative de vitesse est aussi déterminée en prenant en compte la surface effective parcourue par l'onde haute fréquence.

Cependant, cette interprétation du couplage entre la précontrainte et l'onde reste approchée du fait de l'inhomogénéité suivant a_2 de la prédéformation qui peut varier très rapidement au-dessous de la surface de propagation, même dans la tranche de substrat d'épaisseur 2λ . Aussi, il s'avère nécessaire de tenir compte de la variable a_2 permettant la prise en considération du couplage en volume sur l'épaisseur de la plaque.

En général, les termes de la prédéformation s'expriment sous forme de polynômes fonctions des puissances de a_2 .

Par conséquent, chaque terme du tenseur $\overline{A_{ikjm}}$ exprimant le couplage non linéaire entre le cristal et la prédéformation, qui est une fonction linéarisée des $\overline{T_{ij}}$, $\overline{S_{kl}}$ et des gradients des déplacements $\overline{U_i}$ s'écrit comme un polynôme d'ordre n en a_2 .

L'ordre du polynôme dépend essentiellement du type de précontrainte appliquée sur la lame cristalline et des modes de fixation de cette dernière (encastrement, collage, ...).

Comme $\overline{\mathcal{K}_{ikjm}}$ est égal à la variation des coefficients élastiques C_{ikjm} au cours de l'application de la précontrainte, chaque terme du tenseur s'écrit :

$$\overline{\mathcal{K}_{ikjm}} = \sum_n \overline{\alpha_{ikjm}}^{(n)} a_2^n \quad \text{I-47}$$

où les coefficients $\overline{\alpha_{ikjm}}^{(n)}$ dépendent des expressions correspondant au développement des efforts, des déformations statiques, des déplacements et de leurs gradients suivant les puissances de a_2 .

La forme analytique représentant l'onde de Rayleigh ne nous permet pas de faire une moyenne préalable des coefficients $\overline{\mathcal{K}_{ikjm}}$ suivant l'épaisseur du substrat.

Il est donc nécessaire de déterminer directement la valeur de l'intégrale I_2 comme la somme de termes correspondant aux différentes puissances de a_2 des coefficients de couplage : cette intégrale représente la grandeur de la variation de vitesse due globalement à la perturbation calculée au premier ordre.

L'intégrale I_2 s'écrit, en tenant compte de la relation (47) :

$$I_2 = \lambda^2 \left(\frac{\omega_0}{V_0} \right)^2 \sum_n \overline{\alpha_{ikjm}}^{(n)} \sum_{p,q} A_p \circ u_j^{(p)} A_q^* \circ u_i^{(q)} n_m^{(p)} n_k^{(q)*} \int_0^\infty a_2^n e^{-i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*) a_2} da_2$$

L'intégration est effectuée strictement sur l'épaisseur du cristal. En fait, la pénétration de l'onde correspond à uniquement deux longueurs d'onde. Dans tous les cas, l'épaisseur est très grande comparée à 2λ et dans la relation précédente, on peut la considérer comme infinie car, parmi toutes les solutions possibles, seront retenues uniquement celles qui correspondent à une onde atténuée en profondeur.

Cette intégrale se met sous la forme :

$$I_2 = -i\lambda^2 \left(\frac{\omega_0}{V_0}\right)^2 \frac{V_0}{\omega_0} \sum_n \bar{\alpha}_{ikjm}^{(n)} \sum_{p,q} \frac{A_p \circ u_j^{(p)} A_q^* \circ u_i^{(q)*} n_m^{(p)} n_k^{(q)*}}{q_p - q_q^*} \cdot \frac{n!}{\left(i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*)\right)^n}$$

La relation donnant la variation relative de vitesse est obtenue à partir de la relation I-44 en remplaçant l'intégrale I_2 par sa nouvelle expression. Il vient alors :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sum_n \left[\sum_{p,q} \frac{A_p \circ u_j^{(p)} A_q^* \circ u_i^{(q)*} n_m^{(p)} n_k^{(q)*}}{q_p - q_q^*} \cdot \frac{n! \bar{\alpha}_{ikjm}^{(n)}}{i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*)^n} \right]}{2 \rho_c V_0^2 \sum_{p,q} \frac{A_p \circ u_\ell^{(p)} A_q^* \circ u_\ell^{(q)*}}{q_p - q_q^*}} \quad \text{I-48}$$

De la même façon que pour le cas où $\bar{\alpha}_{ikjm}$ ne dépend pas de la variable a_2 , la valeur de la variation relative de vitesse est une valeur moyenne sur une surface λ^2 en un point (a_1, a_3) de la surface de propagation.

La valeur finale $\frac{\Delta V}{V_0}$ sera obtenue en calculant la moyenne $\langle \frac{\Delta V}{V_0} \rangle (a_1, a_3)$ sur l'ensemble de la surface parcourue par l'onde.

Dans le cas de plaques minces ayant une épaisseur de même ordre de grandeur que la longueur d'onde acoustique λ (2 ou 3 λ), nous ne faisons pas l'approximation de la plaque massive infiniment épaisse mais nous prenons en compte l'épaisseur exacte de la ligne.

Dans les intégrales I_1 et I_2 , l'intégration se fait de $a_2 = 0$ à $a_2 = +2h$, et la relation I-48 devient :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\sum_n \sum_{p,q} A_p A_q^* u_j^{(p)} u_i^{(q)*} n_m^{(p)} n_k^{(q)*} \frac{1}{\alpha_{ikjm}^{(n)}} \tau_n^{(p,q)}}{2 \rho_0 V_0^2 \sum_{p,q} A_p A_q^* u_\ell^{(p)} u^{(q)*} \tau_0^{(p,q)}} \quad \text{I-49}$$

$$\text{avec } \tau_n^{(p,q)} = \int_0^{2h} a_2^n e^{-i \frac{\omega_0}{V_0} (q_p - q_q^*) a_2} da_2.$$

Elle est utilisée sous cette forme pour l'étude des membranes à ondes de surface soumise à une pression hydrostatique.

D - LE PROGRAMME DE CALCUL

Le programme de calcul global est résumé dans le schéma synoptique de la figure 1.

Il peut être décomposé en quatre parties :

- calcul des caractéristiques de l'onde de Rayleigh non perturbée ($V_0, q_p, A_p, u_i^{(p)}$) en fonction des angles de coupe ϕ, θ , et de la direction de propagation ψ .
- calcul des prédéformations et des précontraintes statiques.
- calcul des coefficients $\overline{\mathcal{H}_{ikjm}}$.
- calcul final de la variation relative de fréquence $\frac{\Delta f}{f}$.

Ce programme a été appliqué au cas de l'influence de la pression et de la température. En fait, il est tout à fait général et utilisable pour toute perturbation quasistatique, d'origine mécanique ou thermique. Il est écrit en Fortran IV et est utilisé sur l'ordinateur IRIS 50 du Centre de Calcul de Besançon. Ce programme est assez volumineux puisqu'il occupe une place en mémoire centrale de 64 Koctets et nécessite des temps de calcul assez longs du fait des nombreuses rotations d'indices à effectuer pour déterminer les coefficients élastiques du troisième ordre. Ce temps de calcul a pu être réduit en stockant sur disque un certain nombre d'informations, notamment les valeurs des coefficients dans le cas des coupes Y et ST qui sont les coupes les plus fréquemment utilisées.

CHAPITRE II

MÉTHODE DE CALCUL DES PRÉDÉFORMATIONS

-oOo-

Les méthodes utilisées pour déterminer les expressions des efforts, des déformations et des déplacements statiques dûs à l'application d'une perturbation conduisent à des développements analytiques simples dans le cas de modèles à deux dimensions.

Ces méthodes ont été développées par Mindlin pour étudier les vibrations d'une plaque mince de quartz. Mindlin s'est inspiré pour cette étude des travaux effectués par Poisson, Cauchy et Kirchoff, il y a déjà de nombreuses années. En effet, dès 1828, Poisson et Cauchy déduisirent des équations à 3 dimensions de l'élasticité, les équations à 2 dimensions des vibrations de plaques. Leurs résultats furent complétés peu après par Kirchoff qui introduisit des considérations énergétiques et variationnelles et résolut le difficile problème des conditions aux limites.

Exploitant simultanément les travaux de Poisson, Cauchy et Kirchoff sur les plaques, Mindlin, en 1951, a développé une méthode d'approximation consistant à exprimer les composantes des déplacements sous forme d'une série infinie en a_2 , a_2 étant la coordonnée selon l'épaisseur (7). Cette méthode est valable pour les plaques minces dont l'épaisseur est petite devant les dimensions latérales, ce qui est le cas dans notre problème.

Les coefficients des séries, dépendant des variables a_1 et a_3 et éventuellement du temps, sont les déplacements d'ordre n de la plaque. En pratique, seul un certain nombre de coefficients sont conservés. En utilisant une méthode variationnelle, Mindlin obtient les équations d'équilibre aux différents ordres. Dans ces équations, les efforts et leurs moments sont remplacés par leur valeur moyenne sur l'épaisseur.

A ces équations d'équilibre s'ajoutent les conditions aux limites sur les efforts et les conditions d'encastrement ou de fixation de la plaque, qui imposent certaines conditions sur les faces latérales, comme par exemple l'absence de déplacements en certains points de la plaque et l'absence de rotation selon tel ou tel axe.

A - EQUATION VARIATIONNELLE D'EQUILIBRE

Elle se déduit de la fonction de force par le principe d'Hamilton.

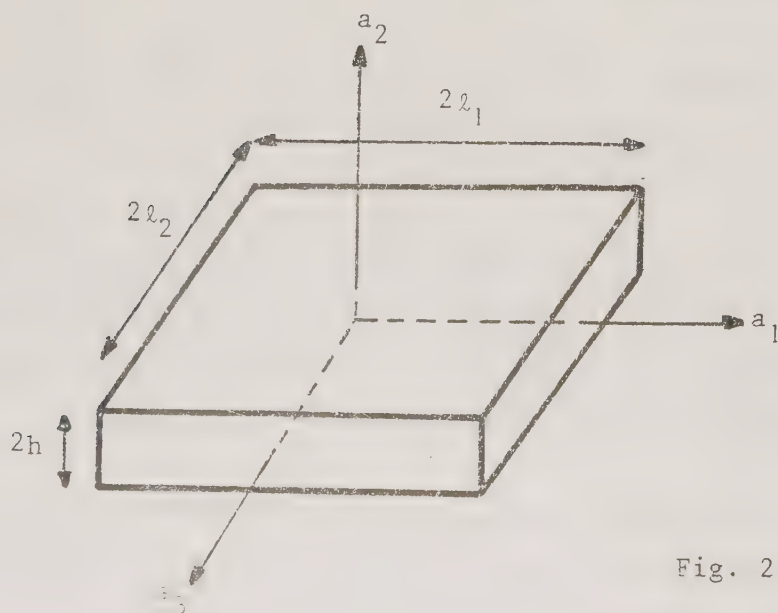


Fig. 2

Si V est le volume de la plaque (fig. 2), l'équation d'équilibre s'écrit sous la forme variationnelle suivante :

$$\int_V (T_{ij,i} - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j dV = 0 \quad \text{II-1}$$

ρ étant la masse spécifique du matériau considéré.

Les déplacements u_j sont remplacés par leur développement en série à l'ordre n :

$$u_j = \sum_n u_j^{(n)} (a_1, a_3) a_2^n \quad \text{II-2}$$

Alors :

$$\int_{-h}^{+h} \int_A (T_{ij,i} - \rho \sum_m a_2^m \ddot{u}_j^{(m)}) \sum_n a_2^n \delta u_j^{(n)} da_2 dA = 0$$

avec $A = \frac{V}{2h}$, h étant la demi-épaisseur de la plaque.

Pour $i = 1$ ou 3 ,

$$\int_{-h}^{+h} T_{ij,i} \sum_n a_2^n \delta u_i^{(n)} da_2 = \sum_n T_{ij}^{(n)} \delta u_j^{(n)} \quad \text{II-3}$$

où $T_{ij}^{(n)}$ représente la valeur moyenne sur l'épaisseur des moments d'ordre n, c'est-à-dire :

$$T_{ij}^{(n)} = \int_{-h}^{+h} T_{ij} a_2^n da_2 \quad \text{II-4}$$

Pour $i = 2$,

$$\int_{-h}^{+h} T_{2j} \sum_n a_2^n \delta u_j^{(n)} da_2 = \sum_n (F_j^{(n)} - n T_{2j}^{(n-1)}) \delta u_j^{(n)} \quad \text{II-5}$$

où $F_j^{(n)}$ est donné par la relation :

$$F_j^{(n)} = \begin{pmatrix} a_2^n & T_{2j} \end{pmatrix} \begin{matrix} +h \\ -h \end{matrix}$$

II-6

D'autre part :

$$\int_{-h}^{+h} \left(\sum_m a_2^n \ddot{u}_j^{(m)} \right) \left(\sum_n a_2^n \delta u_j^{(n)} \right) da_2 = \sum_m \sum_n H_{mn} \ddot{u}_j^{(m)} \delta u_j^{(n)} \quad \text{II-7}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } H_{mn} &= 2h^{m+n+1} & \text{si } m+n \text{ est pair} \\ &= 0 & \text{si } m+n \text{ est impair.} \end{aligned}$$

En rassemblant les relations II-3 et II-7, l'équation d'équilibre initiale II-1 devient :

$$\int_A \sum_n (T_{ij,i}^{(n)} - n T_{2j}^{(n-1)} + F_j^{(n)} - \rho \sum_m H_{mn} \ddot{u}_j^{(m)}) \delta u_j^{(n)} dA = 0 \quad \text{II-8}$$

Remarquons que la quantité $T_{ij,i}^{(n)}$ est nulle lorsque i vaut 2, puisque les $T_{ij}^{(n)}$ ne dépendent que de a_1 et de a_3 .

L'équation d'équilibre d'ordre n s'écrit alors :

$$T_{ij,i}^{(n)} - n T_{2j}^{(n-1)} + F_j^{(n)} = \rho \sum_m H_{mn} \ddot{u}_j^{(m)} \quad \text{II-9}$$

B - EXPRESSION DES DEFORMATIONS

En remplaçant les déplacements par leur développement en série, l'expression des déformations devient :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_n (a_2^n u_{i,j}^{(n)} + n a_2^{(n-1)} a_{2,j} u_i^{(n)}) + \sum_n (a_2^n u_{j,i}^{(n)} + n a_2^{n-1} a_{2,i} u_j^{(n)}) \right)$$

Lorsque j vaut 2, la quantité $u_{i,j}^{(n)}$ est nulle ; les déformations S_{ij} se mettent donc sous la forme d'un développement en série d'ordre n de a_2 :

$$S_{ij} = \sum_n S_{ij}^{(n)} a_2^{(n)} \quad \text{II-10}$$

avec :

$$S_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)} + (n+1) (\delta_{2j} u_i^{(n+1)} + \delta_{2i} u_j^{(n+1)})) \quad \text{II-11}$$

Dans cette expression, δ_{2i} est le symbole de Kronecker.

C - RELATION EFFORTS - DEFORMATIONS

La loi de Hooke s'écrit :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= C_{ijkl} S_{kl} \\ &= C_{ijkl} \sum_n a_2^n S_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$

Cette relation, introduite dans l'équation (II-4), donne la valeur moyenne des moments d'ordre n des contraintes :

$$T_{ij}^{(n)} = C_{ijkl} \sum_m S_{kl}^{(m)} \int_{-h}^{+h} a_2^{m+n} da_2 \quad \text{II-12}$$

soit, d'après l'expression (II-7) :

$$T_{ij}^{(n)} = C_{ijkl} \sum_m H_{mn} S_{kl}^{(m)} \quad \text{II-13}$$

Finalement, la méthode de résolution dans un problème à trois dimensions peut se résumer ainsi :

- les déplacements u_1, u_2, u_3 sont écrits sous forme d'un développement en série d'ordre n en a_2 .

- les déformations S_{ij} et les composantes d'ordre n $S_{ij}^{(n)}$ sont exprimées à partir des expressions des déplacements u_i .

- les contraintes T_{ij} se déduisent des déformations S_{ij} et les moments d'ordre n $T_{ij}^{(n)}$ sont ensuite écrits à partir des contraintes T_{ij} .

- les équations d'équilibre conduisent à un premier système d'équations différentielles s'exprimant en fonction des composantes d'ordre n des déplacements et de leurs dérivées.

- les conditions aux limites (traduisant par exemple le fait qu'une face est libre et donc ne subit pas de contrainte) conduisent à un second système d'équations différentielles.

La résolution des deux systèmes d'équations différentielles aboutit à l'obtention des expressions des composantes d'ordre n des déplacements, fonctions de a_1 et de a_3 . Il apparaît des constantes d'intégration, qui sont éliminées à l'aide des conditions sur les bords, c'est-à-dire des conditions d'encastrement ou de fixation de la plaque.

Le problème est alors résolu complètement et l'on peut en déduire les expressions des déplacements, des efforts et des déformations en tout point de la plaque. L'intérêt particulier de cette théorie est de tenir parfaitement compte de l'anisotropie du cristal, tout le long du calcul, et d'être très générale, c'est-à-dire de pouvoir s'appliquer dans le cas de pression, de force, d'accélération. D'autre part, les conditions sur les bords de la plaque n'interviennent qu'en dernier lieu et peuvent donc être modifiées très facilement.

Mais il faut remarquer que, si la théorie est en principe parfaitement réalisable dans tous les cas, les développements analytiques sont souvent très compliqués. Ainsi, dans le cas d'un modèle à trois dimensions, les systèmes d'équations différentielles sont très longs à résoudre, dès que les déplacements sont développés à un ordre supérieur à 3, ce qui est le cas des effets de la pression hydrostatique.

Il sera donc avantageux d'utiliser un modèle permettant d'appliquer cette théorie dans le cas d'un problème à deux dimensions, pour lequel elle est tout particulièrement adaptée, puis d'introduire la troisième dimension par intégration.

CHAPITRE III

MODÉLISATION D'UN CAPTEUR DE PRESSION

-oOo-

Après avoir exposé quelques résultats sur les lames massives de quartz soumises à une pression hydrostatique, nous nous consacrerons à la modélisation de plaques minces de quartz soumises à des pressions de l'ordre de quelques bars et en particulier au cas de membranes circulaires minces, d'une épaisseur de quelques centaines de microns.

A - LAME MASSIVE DE QUARTZ

1°) ETUDE THEORIQUE

On considère une plaque rectangulaire de quartz, ayant une épaisseur de l'ordre de quelques millimètres, posée sur un support et soumise à une pression hydrostatique (fig. 3)

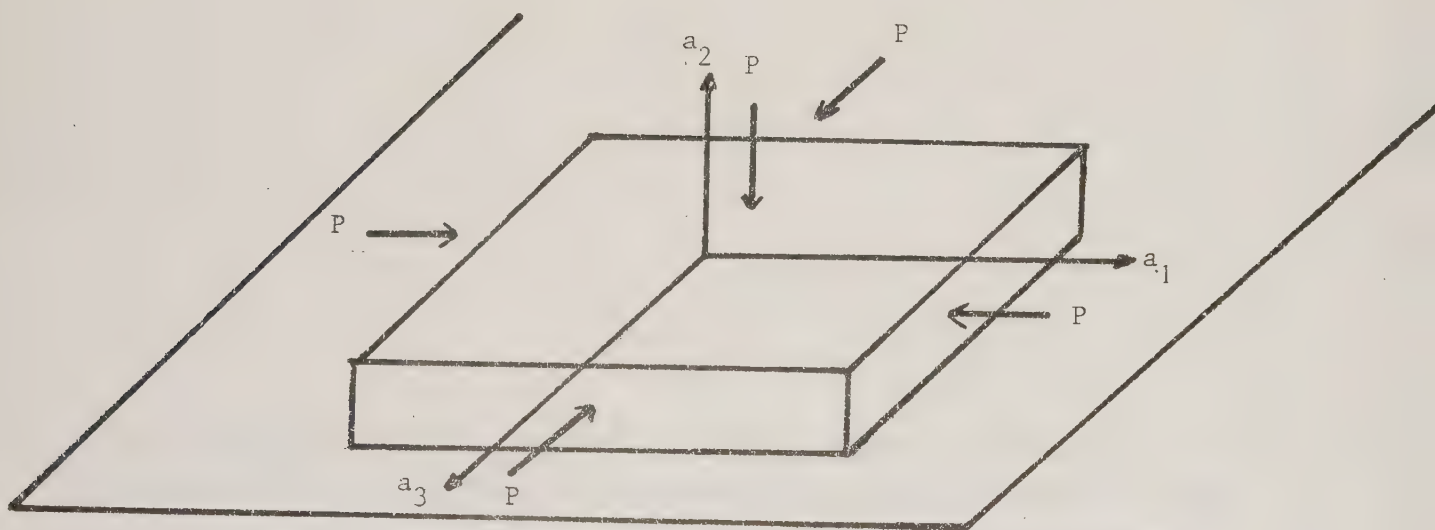


Fig. 3

Les contraintes sur les faces libres ont pour valeur :

$$\begin{cases} T_1 = T_2 = T_3 = -P \\ T_4 = T_5 = T_6 = 0 \end{cases} \quad \text{III-1}$$

Ces expressions permettent d'écrire les déformations S_1, S_2, S_3 sous la forme :

$$\begin{aligned} S_1 &= -P (s_{11} + s_{12} + s_{13}) = -\sigma_1 P \\ S_2 &= -P (s_{21} + s_{22} + s_{23}) = -\sigma_2 P \\ S_3 &= -P (s_{31} + s_{32} + s_{33}) = -\sigma_3 P \end{aligned} \quad \text{III-2}$$

Les déplacements s'écrivent alors :

$$u_i = A_i a_1 + B_i a_2 + C_i a_3 \quad \text{III-3}$$

avec $A_i = -\sigma_i P$ pour $i = 1, 2, 3$.

Les autres coefficients A_j, B_j, C_j , encore inconnus, sont déterminés par les différentes relations suivantes :

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{2} (u_{3,2} + u_{2,3}) = -P (s_{41} + s_{42} + s_{43}) = -\sigma_4 P \\ S_5 &= \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,2}) = -P (s_{51} + s_{52} + s_{53}) = -\sigma_5 P \\ S_6 &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = -P (s_{61} + s_{62} + s_{63}) = -\sigma_6 P \end{aligned} \quad \text{III-4}$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{en } a_2 = -2h, \quad u_2 = 0, \quad \text{quels que soient } a_1 \text{ et } a_3.$$

Par symétrie, le centre de la face inférieure de la plaque est fixe, et nous considérons que la plaque ne peut pas tourner autour de l'axe Ox_2 .

Les expressions des déplacements sont alors complètement déterminées :

$\begin{aligned} u_1 &= -\sigma_1 P a_1 - 2\sigma_6 P a_2 - \sigma_5 P a_3 - 4\sigma_6 P h \\ u_2 &= -\sigma_2 P a_2 - 2\sigma_2 P k \\ u_3 &= -\sigma_5 P a_1 - 2\sigma_4 P a_2 - \sigma_3 P a_3 - 4\sigma_4 P h \end{aligned}$	III-5
--	-------

Toutes ces relations sont introduites dans le programme de perturbation.

La sensibilité obtenue pour une ligne à retard située selon l'axe Oa_1 et pour une fréquence de 105 MHz, est de 360 Hz par bar pour une coupe ST.

2°) RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les essais ont porté sur 3 plaques de différentes dimensions, posées ou collées sur leur support.

La figure 4 représente la variation de la fréquence d'oscillation pour une plaque collée, en coupe ST, et soumise à une pression allant jusqu'à 3,5 bars.

Comme le montre la théorie (III-5), la fréquence varie linéairement avec la pression.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus pour les trois plaques :

Coupe	Dimensions $l_1 \times l_2 \times 2h$ (cm)	Fixation	Variation de fréquence (Hz/bar)
ST	$1 \times 1,1 \times 0,15$	Collée	360
ST	$4 \times 1 \times 0,10$	Collée	600
ST	$4 \times 1 \times 0,20$	Posée	250

Les sensibilités des plaques de quartz épaissies sont faibles et ne présentent donc pas d'intérêt pour la réalisation d'un capteur de pression de haute performance.

Cependant, la sensibilité est d'autant plus grande que la lame est mince. Il sera donc préférable, pour atteindre de grandes sensibilités, d'utiliser des plaques amincies dans leur partie active.

SENSIBILITE A LA PRESSION

PLAQUE MASSIVE

COUPE ST-X

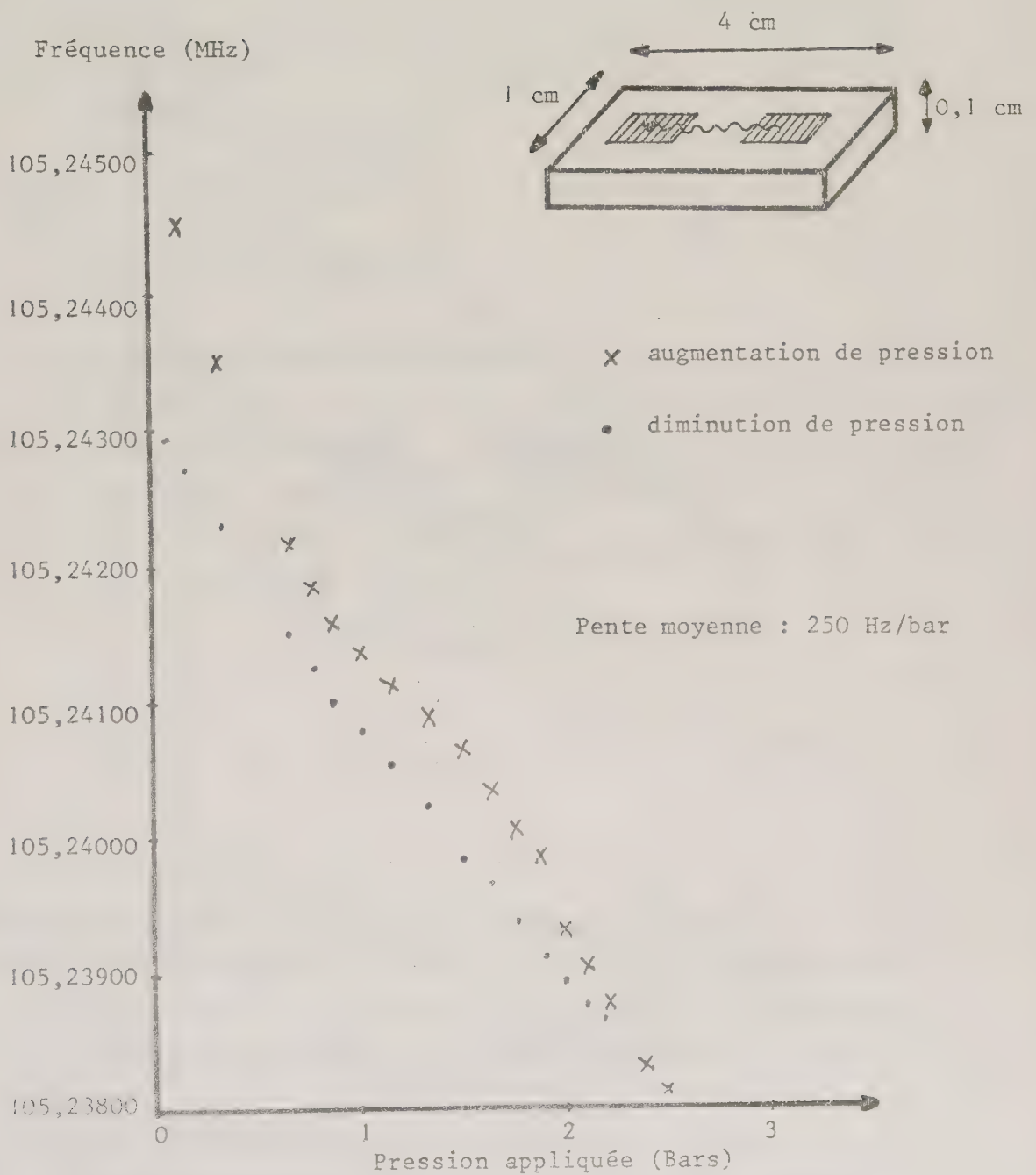


Fig. 4

B - MEMBRANE CIRCULAIRE

Comme nous venons de le voir, la sensibilité d'une plaque massive de quartz se révélant être faible, l'utilisation d'une membrane circulaire se déformant en flexion a été proposée par Cullen (8). Une telle membrane, qui présente des sensibilités beaucoup plus importantes, est représentée sur la figure 5.

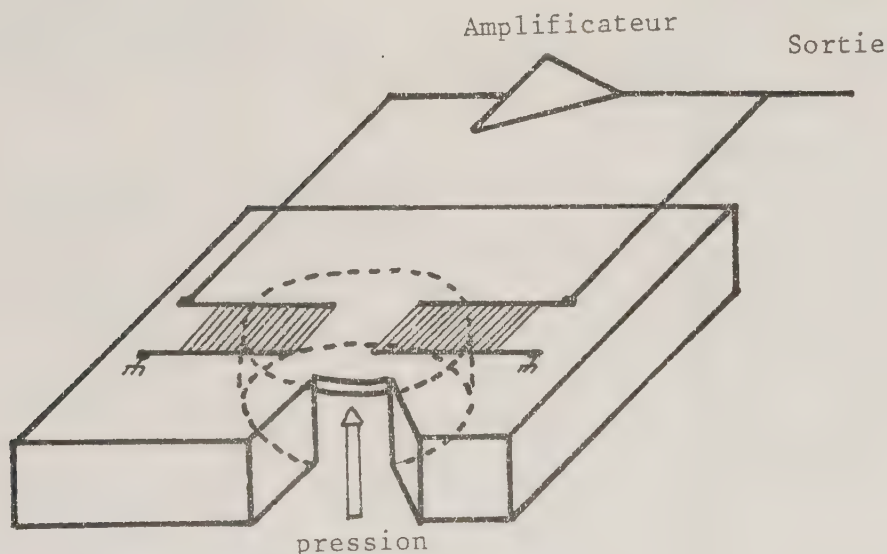


Fig. 5

La pression est appliquée sur la face inférieure qui ne supporte pas les transducteurs. Jusqu'à présent, les études des déformations de telles membranes ont toujours été réalisées dans le cas isotrope (9). Ici le problème à 3 dimensions met en jeu un matériau anisotrope.

La membrane est représentée par une plaque circulaire d'épaisseur $2h$, encadrée sur son pourtour et soumise, de manière générale, à une pression q_1 sur sa face inférieure et à une pression q_2 sur sa face supérieure (fig. 6).

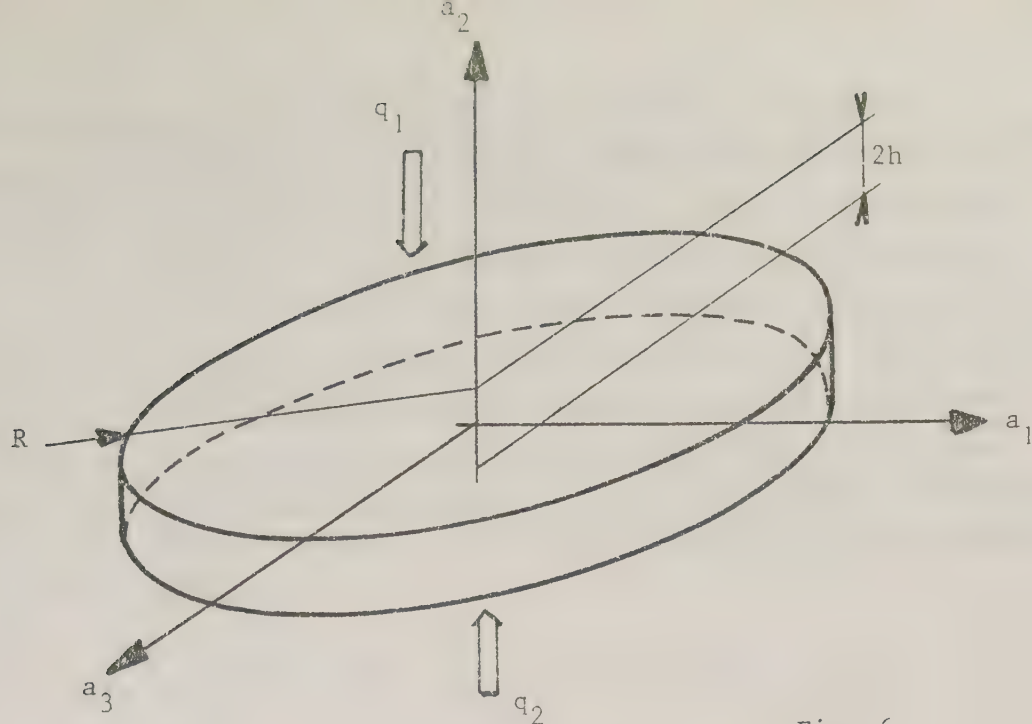


Fig. 6

Comme il a été précisé précédemment, le calcul direct à trois dimensions n'est guère envisageable en raison de sa complexité. Il a donc été nécessaire, dans un premier temps, de considérer le problème dans deux dimensions, autrement dit dans un plan de section quelconque P' , parallèle à l'axe Oa_2 (fig. 7) et de déterminer les expressions des efforts, déformations et déplacements dans ce plan.

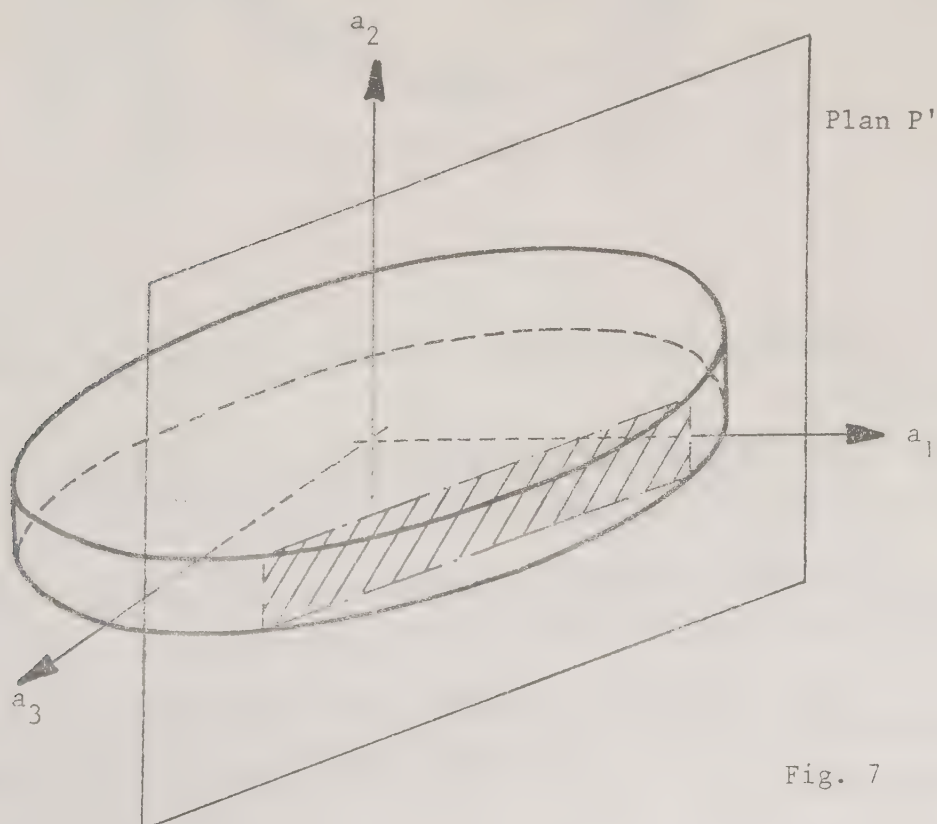


Fig. 7

Supposons maintenant que nous recherchons, en un point M quelconque de la plaque, de coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans le repère (O, a_1, a_2, a_3) , les déplacements, efforts et déformations provoqués par l'application de la pression sur la membrane. Nous allons donc considérer tous les plans P' parallèles à l'axe Oa_2 , passant par M (c'est-à-dire faire un "balayage" de la plaque en tournant le plan de section autour de M), puis déterminer les contraintes que chacun de ces plans provoque au point M (fig. 8). La superposition de ces contraintes nous donne la résultante des contraintes au point M. Il est alors aisé d'en déduire les déformations, puis les déplacements correspondants.

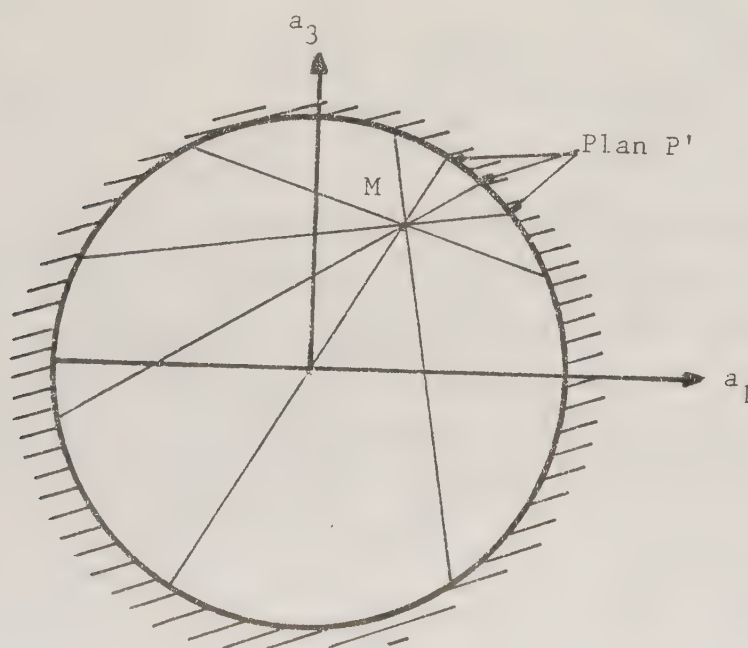


Fig. 8

De manière plus concrète, le calcul se déroulera selon les trois étapes suivantes :

- les déformations, déplacements et contraintes sont calculés dans le plan $P_0(a_1, a_2)$, puis dans le plan P , parallèle à P_0 , passant par M.
- les mêmes quantités sont ensuite déterminées dans un plan quelconque P' normal aux faces principales et passant par M.
- enfin, les expressions des contraintes précédentes sont intégrées sur toute la surface de la membrane, donnant les contraintes et donc les déformations totales.

Les déplacements sont alors déterminés complètement à l'aide des conditions d'encastrement sur les bords de la plaque.

1°) CAS DU PLAN (a_1, a_2)

En plus des pressions (q_1, q_2), le calcul est effectué en tenant compte d'une force de volume ρX_2 (ρ étant la masse spécifique du matériau), dirigée selon l'axe Oa_2 :

Rappelons que la plaque a pour épaisseur $2h$ (fig. 9)

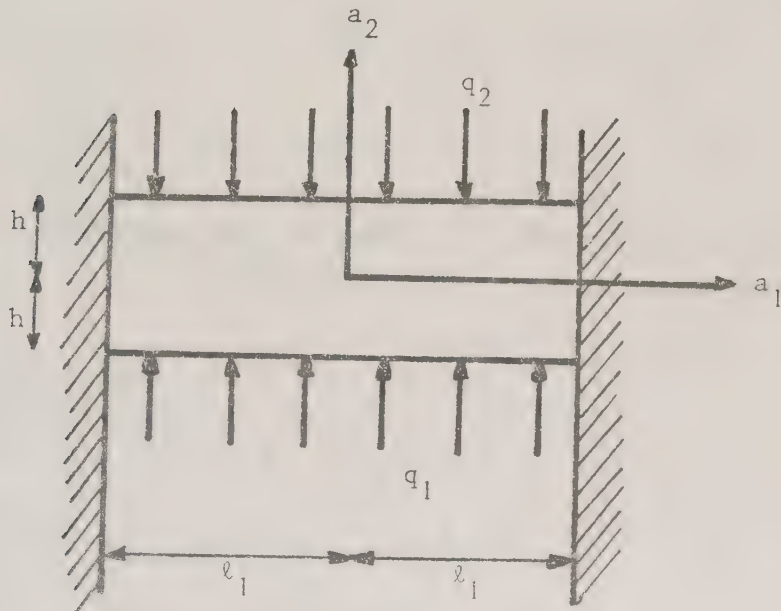


Fig. 9

Dans le cas de la pression, il est suffisant d'écrire les déplacements u_i à l'ordre 4, de la manière suivante :

$$u_i = u_i^{(0)} + a_1 u_i^{(1)} + a_2 u_i^{(2)} + a_2^3 u_i^{(3)} + a_2^4 u_i^{(4)} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{III-6}$$

Quant aux polynômes $u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)}, u_i^{(4)}$ (qui sont des polynômes en a_1), ils se mettent sous la forme :

$$u_2^{(0)} = E_1 a_1^4 + A_1 a_1^3 + B_1 a_1^2 + C_1 a_1 + D_1$$

$$u_2^{(1)} = B_2 a_1^2 + C_2 a_1 + D_2$$

$$u_2^{(2)} = B_3 a_1^2 + C_3 a_1 + D_3$$

$$u_2^{(3)} = B_4 a_1^2 + C_4 a_1 + D_4$$

$$u_2^{(4)} = D_5$$

III-7

$$u_1^{(0)} = B_6 a_1^2 + C_6 a_1 + D_6$$

$$u_1^{(1)} = B_7 a_1^2 + A_7 a_1^3 + C_7 a_1 + D_7$$

$$u_1^{(2)} = B_8 a_1^2 + C_8 a_1 + D_8$$

$$u_1^{(3)} = B_0 a_1^2 + C_0 a_1 + D_0$$

$$u_1^{(4)} = D_9$$

Le problème consiste à déterminer les coefficients A_i, B_i, C_i, D_i et E_i . Les contraintes d'ordre n s'écrivent :

$$T_i^{(0)} = C_{i1} u_{1,1}^{(0)} + C_{i2} u_2^{(1)} + C_{i6} (u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)})$$

$$T_i^{(1)} = C_{i1} u_{1,1}^{(1)} + C_{i2} u_2^{(2)} + C_{i6} (u_{2,1}^{(1)} + u_1^{(2)})$$

$$T_i^{(2)} = C_{i1} u_{1,1}^{(2)} + C_{i2} u_2^{(3)} + C_{i6} (u_{2,1}^{(2)} + u_1^{(3)})$$

$$T_i^{(3)} = C_{i1} u_{1,1}^{(3)} + C_{i2} u_2^{(4)} + C_{i6} (u_{2,1}^{(3)} + u_1^{(4)})$$

III-8

Les équations d'équilibre d'ordre n prennent la forme :

à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_6^{(0)}}{\partial a_1} - 2 \rho h X_2 + (q_1 - q_2) = 0 \\ \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial a_1} = 0 \end{cases}$$

III-9

à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial T_6^{(1)}}{\partial a_1} + h (q_1 + q_2) - T_2^{(0)} = 0$$

III-10

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial a_1} - T_6^{(0)} = 0$$

à l'ordre 2 :

$$\frac{\partial T_6^{(2)}}{\partial a_1} - 2T_2^{(1)} + \frac{2h^3}{3} \rho X_2 - h^2 (q_1 - q_2) = 0$$

III-11

$$\frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial a_1} - 2T_6^{(1)} = 0$$

à l'ordre 3 :

$$\frac{\partial T_6^{(3)}}{\partial a_1} - 3T_2^{(2)} + h^3 (q_1 + q_2) = 0$$

III-12

$$\frac{\partial T_1^{(3)}}{\partial a_1} - 3T_6^{(2)} = 0$$

Les conditions aux limites se traduisent par :

$$T_6 = 0 \quad \text{en} \quad a_2 = +h$$

$$T_2 = +q_1 \quad \text{en} \quad a_2 = +h$$

$$T_2 = +q_2 \quad \text{en} \quad a_2 = -h$$

III-13

Nous donnons en annexe (II) les expressions des différentes équations différentielles, le principe de résolution du système et les expressions des déplacements obtenus avec des constantes d'intégration avant que les conditions sur les bords de la plaque ne soient appliqués.

Les conditions d'encastrement s'écrivent :

$$\text{en } a_2 = 0 \text{ et } a_1 = \pm R$$

$$u_2 = 0$$

$$u_1 = 0$$

$$u_{2,1} = 0$$

Ces relations permettent de déterminer les constantes subsistant dans les expressions des déplacements d'ordre n. Ceux-ci s'écrivent alors :

(III-14)

$$u_2^{(0)} = - \frac{F_2 Z}{8\Delta h^2} (R^2 - a_1^2)^2$$

$$u_2^{(1)} = \frac{F_2}{\Delta} \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z} - \frac{3Z_3}{2} \right) a_1 - \frac{c_{66}}{2Z} (q_1 + q_2)$$

$$u_2^{(2)} = \frac{F_2}{2} \left(\frac{3Z_1}{2\Delta h^2} (a_1^2 - R^2) + \frac{c_{26} Z_2}{Z^2} - \frac{3c_{66}}{2Z} + \frac{Z_1}{Z} \left(\frac{3Z_4}{2} - \frac{Z_2^2}{Z} \right) \right)$$

$$u_2^{(3)} = \frac{F_2}{2\Delta h^2} \left(Z_3 - \frac{2Z_1 Z_2}{Z} \right) a_1$$

$$u_2^{(4)} = \frac{F_2}{4h^2 Z} \left(- \frac{c_{26} Z_2}{Z} + \frac{Z_1}{2} \left(\frac{2Z_2^2}{Z} - Z_1 - Z_4 \right) + \frac{c_{66}}{2} \right)$$

$$u_1^{(0)} = - \frac{F_2 \Delta}{4\Delta} (a_1^2 - R^2)$$

$$u_1^{(1)} = \frac{F_2}{\Delta} \left(\left(\frac{3Z_4}{2} - \frac{Z_2^2}{Z} \right) a_1 - \frac{ZR^2}{2h^2} a_1 + \frac{Z}{2h^2} a_1^3 \right)$$

$$u_1^{(2)} = \frac{F_2}{2} \left(\frac{Z_2}{2\Delta h^2} (R^2 - 3a_1^2) + \frac{3c_{26}}{2Z} - \frac{c_{22} Z_2}{Z^2} + \frac{1}{2\Delta} \left(\frac{3}{2} Z Z_3 - Z_1 Z_2 - \frac{3Z_2 Z_4}{2} + \frac{Z_2^3}{Z} \right) \right)$$

$$u_1^{(3)} = \frac{F_2}{2\Delta h^2} \left(2 \frac{Z_2^2}{Z} - Z_1 - Z_4 \right) a_1$$

$$u_1^{(4)} = \frac{F_2}{4h^2} \left(\frac{c_{22} Z_2}{2Z^2} - \frac{Z_3}{2\Delta} - \frac{c_{26}}{Z} - \frac{Z_2}{2Z\Delta} \left(3Z_1 - \frac{2Z_2^2}{Z} + Z_4 \right) \right)$$

avec :

$$q = q_1 - q_2$$

$$F_2 = \rho X_2 + \frac{q}{2h}$$

$$Z = c_{26}^2 - c_{22} c_{66}$$

$$Z_1 = c_{66} c_{21} - c_{61} c_{26}$$

$$Z_2 = c_{26} c_{21} - c_{61} c_{22}$$

$$Z_3 = c_{26} c_{21} - c_{26} c_{11}$$

$$Z_4 = c_{21}^2 - c_{22}c_{11}$$

$$\Delta = c_{16}Z_2 - c_{11}Z - c_{12}Z_1$$

Les déformations $S_i^{(n)}$ se déduisent des expressions ci-dessus à l'aide de la formule (II-11).

Les contraintes T_i dans le plan (a_1, a_2) sont ensuite obtenues par la loi de Hooke :

$$T_i = s_{ij} S_j$$

2°) CAS D'UN PLAN QUELCONQUE P' PASSANT PAR M

Plaçons-nous dans un plan quelconque P' , parallèle à Oa_2 , passant par M et repéré par les axes (a'_1, a_2) et par l'angle ϕ .

L'angle ϕ est l'angle qu'il fait avec le plan (a_1, a_2) (fig. 10)

Le point M a les coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans le repère (Oa_1, a_2, a_3) et les coordonnées (a'_1, a_2) dans le repère $(O'a'_1, a_2, a'_3)$ lié au plan.

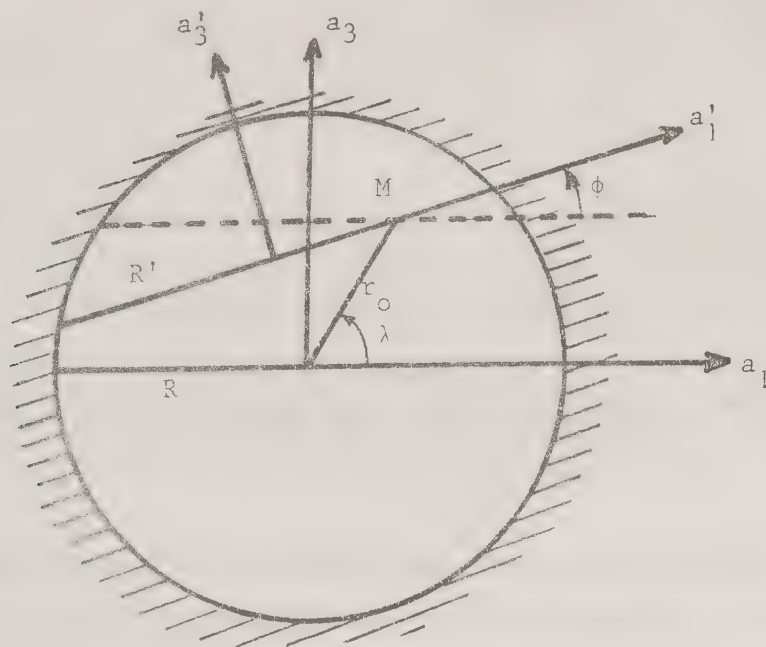


Fig. 10

L'obtention des expressions des déplacements u_i' du plan (a_1', a_2') , à partir des expressions des u_i dans le plan (a_1, a_2) se fait par les transformations suivantes (III-15) :

1) a_1 est remplacé par $a_1' = r_0 \cos (\phi - \lambda)$, r_0 et λ étant les coordonnées polaires par rapport à O du point M ; a_1' s'exprime donc aussi en fonction de a_1 et de a_3 :

$$a_1' = a_1 \cos \phi + a_3 \sin \phi \quad \text{III-15}$$

2) R est remplacé par R', avec :

$$R'^2 = R^2 - r_0^2 \sin^2 (\phi - \lambda)$$

3) Les coefficients C_{ij} deviennent les coefficients C'_{ij} , obtenus à partir des C_{ij} par une rotation d'angle ϕ autour de Oa_2 .

Remarque : les expressions des C'_{ij} en fonction de ϕ sont données dans l'annexe I.

4) Les termes $Z, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \Delta$ deviennent $Z', Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4, \Delta'$, fonctions des C'_{ij} , c'est-à-dire des C_{ij} et de ϕ .

Les expressions des déplacements u_i' ainsi obtenues sont données à l'annexe (II).

Quant aux déformations S'_i , elles vérifient les équations de compatibilité qui se réduisent à :

$$\frac{\partial^2 S'_1}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 S'_2}{\partial a_1^2} = \frac{\partial^2 S'_6}{\partial a_1 \partial a_2}$$

Les contraintes T'_i sont déduites des déformations :

$$T'_i = c'_{i1} S'_1 + c'_{i2} S'_2 + c'_{i6} S'_6 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 6$$

Remarque : les contraintes T'_4 et T'_5 sont nulles à la surface et dans toute l'épaisseur de la plaque. En revanche, la contrainte T'_3 n'est pas nulle et dépend de la variable a_1' .

Les contraintes calculées vérifient les équations d'équilibre, ainsi que les conditions aux limites imposées au départ sur les faces inférieures et supérieures de la plaque.

Elles dépendent des variables a'_1 et a_2 et, en utilisant la relation (III-14), elles peuvent s'écrire sous forme d'un développement en série de a_2 :

$$T'_i = \sum_n T'^{(n)}_i a_2^n, \quad \text{III-16}$$

où les quantités $T'^{(n)}_i$ sont des polynômes en (a_1, a_2) dépendant du plan considéré, de la pression, de l'épaisseur de la membrane, de son rayon et des coefficients élastiques du 2e ordre.

Le point M est donc soumis, dans le repère (a'_1, a_2, a'_3) aux contraintes T'_1, T_2, T'_3 et T'_6 . Dans le repère (a_1, a_2, a_3) il est donc soumis de la part du plan P' aux contraintes $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ et τ_6 , obtenues à partir des précédentes par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \cos^2 \phi T'_1 + \sin^2 \phi T'_3 \\ \tau_2 &= T'_2 \\ \tau_3 &= \sin^2 \phi T'_1 + \cos^2 \phi T'_3 \\ \tau_4 &= \sin \phi T'_6 \\ \tau_5 &= \sin \phi \cos \phi (T'_1 - T'_3) \\ \tau_6 &= \cos \phi T'_6 \end{aligned}$$

L'intégrale de ces contraintes τ_i sur le contour donne alors la contribution de toute la plaque au point M, c'est-à-dire la valeur des contraintes résultantes $T^t_1, T^t_2, T^t_3, T^t_4, T^t_5, T^t_6$:

$$T^t_i = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \tau_i R d\phi \quad \text{III-18}$$

Le calcul de ces intégrales a été effectué par ordinateur, au moyen d'un programme écrit en Fortran IV ; l'intégration elle-même a été réalisée au moyen d'un sous-programme permettant de réduire au minimum le temps de calcul tout en conservant une précision suffisante.

Les contraintes T^t_i s'expriment sous forme de polynômes en a_1, a_2, a_3 dont les coefficients G_{ij} sont calculés numériquement :

$$\begin{aligned} T^t_i &= G_{i1} + G_{i2}a_1 + G_{i3}a_3 + G_{i4}a_2 + G_{i5}a_2a_1^2 + G_{i6}a_2a_3^2 \\ &+ G_{i7}a_1a_2a_3 + G_{i8}a_2^3 + G_{i9}a_2^3a_1 + G_{i10}a_2^3a_3 \quad (i = 1, \dots, 6) \end{aligned} \quad \text{III-19}$$

Les coefficients G_{ij} sont reliés entre eux par 21 relations, données par les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial T_1^t}{\partial a_1} + \frac{\partial T_6^t}{\partial a_2} + \frac{\partial T_5^t}{\partial a_3} = 0$$

$$\frac{\partial T_6^t}{\partial a_1} + \frac{\partial T_2^t}{\partial a_2} + \frac{\partial T_4^t}{\partial a_3} = 0$$

$$\frac{\partial T_5^t}{\partial a_1} + \frac{\partial T_4^t}{\partial a_2} + \frac{\partial T_2^t}{\partial a_3} = 0$$

Elles sont vérifiées numériquement.

De la même manière, les conditions aux limites sont alors vérifiées :

$$T_6^t = T_4^t = 0 \quad \text{en } a_2 = +h$$

$$T_2^t = +q_1 \quad \text{en } a_2 = +h$$

$$T_2^t = +q_2 \quad \text{en } a_2 = -h$$

Les déformations S_i^t sont obtenues en tout point de la plaque à partir de l'expression des contraintes T_i^t , ce qui permet de les écrire sous une forme analogue :

$$S_i^t = M_{i1} + M_{i2}a_1 + M_{i3}a_3 + M_{i4}a_2 + M_{i5}a_2a_1^2 + M_{i6}a_2a_3^2 \quad \text{III-20}$$

$$+ M_{i7}a_1a_2a_3 + M_{i8}a_2^3 + M_{i9}a_2^2a_1 + M_{i10}a_2^2a_3 \quad (i = 1, \dots, 6)$$

$$\text{avec : } M_{ij} = s_{ik} G_{kj}$$

Les coefficients M_{ij} sont calculés numériquement. Ils sont reliés entre eux par des relations issues des équations de compatibilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S_1^t}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 S_2^t}{\partial a_1^2} = \frac{\partial^2 S_6^t}{\partial a_1 \partial a_2} \\ \frac{\partial^2 S_2^t}{\partial a_3^2} + \frac{\partial^2 S_3^t}{\partial a_2^2} = \frac{\partial^2 S_4^t}{\partial a_2 \partial a_3} \\ \frac{\partial^2 S_3^t}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 S_1^t}{\partial a_3^2} = \frac{\partial^2 S_5^t}{\partial a_1 \partial a_3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 S_1^t}{\partial a_2 \partial a_3} = \frac{\partial}{\partial a_1} \left(-\frac{\partial S_4^t}{\partial a_1} + \frac{\partial S_5^t}{\partial a_2} + \frac{\partial S_6^t}{\partial a_3} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 S_2^t}{\partial a_2 \partial a_3} = \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{\partial S_4^t}{\partial a_1} - \frac{\partial S_5^t}{\partial a_2} + \frac{\partial S_6^t}{\partial a_3} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 S_3^t}{\partial a_1 \partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_3} \left(\frac{\partial S_4^t}{\partial a_1} + \frac{\partial S_5^t}{\partial a_2} - \frac{\partial S_6^t}{\partial a_3} \right) \end{array} \right.$$

Les déplacements sont obtenus par intégration des déformations et par applications des conditions d'encastrement de la plaque pour éliminer les constantes restantes, c'est-à-dire, si l'on se place en coordonnées cylindriques :

$$\begin{array}{lll} \text{en } a_2 = 0 & u_2^t = 0 & (\text{pas de déplacement vertical et} \\ & u_r^t = 0 & \text{radial à l'encastrement}) \\ & \frac{\partial u_2^t}{\partial r} = 0 & (\text{pas de rotation autour de } O_r) \end{array}$$

Dans le cas de coupes à simple rotation, un certain nombre de coefficients M_{ij} sont nuls, du fait de la nullité de certains s_{ij} . Les déformations se réduisent à :

$$S_i^t = M_{i1} + M_{i3}a_3 + M_{i4}a_2 + M_{i5}a_2a_1^2 + M_{i6}a_2a_3^2 + M_{i8}a_2^3 + M_{i10}a_2^2a_3 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4$$

$$S_j^t = M_{j2}a_1 + M_{j7}a_1a_2a_3 + M_{j9}a_2^2a_1 \quad \text{pour } j = 5, 6$$

ce qui implique finalement pour les déplacements u_1^t, u_2^t, u_3^t au point M les expressions suivantes :

$$u_1^t = M_{13} a_1 a_3 + a_2 (M_{14} a_1 + M_{15} \frac{a_1^3}{3} + M_{16} a_3^2 a_1) + M_{67} a_2^2 a_1 a_3 + M_{18} a_2^2 a_1$$

$$u_2^t = -\frac{M_{16}}{4} (R^2 - a_1^2 a_3^2)^2 + a_2 (M_{21} + M_{23} a_3) + \frac{a_2^2}{2} (M_{24} + M_{25} a_1^2 + M_{26} a_3^2) + \frac{M_{20}}{3} a_2^3 a_3 + \frac{M_{28}}{4} a_2^4$$

III-21

$$u_3^t = a_2 (M_{34} a_3 + M_{16} a_1^2 a_3 + M_{36} \frac{a_3^3}{3} + 2M_{41}) + (M_{52} - \frac{M_{13}}{2}) a_1^2 + a_2^2 (M_{46} a_3^2 + M_{45} a_1^2 + M_{44} - \frac{M_{23}}{2}) + M_{38} a_3 a_2^3 + (-\frac{M_{48}}{2} - \frac{M_{20}}{12}) a_2^4 + M_{33} \frac{a_3^2}{2} - M_{33} \frac{R^2}{2}$$

Dans le cas d'une coupe quelconque, la méthode est strictement la même, mais elle fait intervenir tous les coefficients M_{ij} . Les déplacements s'écrivent alors :

$$u_1^t = -(M_{53} + \frac{M_{32}}{2}) R^2 + M_{13} a_1 a_3 + M_{12} \frac{a_1^2}{2} + (2M_{52} - M_{32}) \frac{a_3^2}{2} + M_{51} a_3 + a_2 (M_{14} a_1 + M_{15} \frac{a_1^3}{3} + M_{16} a_3^2 a_1 + M_{67} a_1 a_3 + M_{17} \frac{a_1^2}{2} a_3 + M_{54} a_3 + M_{56} \frac{a_3^3}{3} + 2M_{61}) + a_2^2 (M_{19} \frac{a_1^2}{2} + M_{50} a_3^2 + M_{64} - \frac{M_{22}}{2}) + a_2^3 (M_{18} a_1 + \frac{M_{49}}{3} a_3) + (2M_{68} - \frac{M_{29}}{3}) \frac{a_2^4}{4}$$

$$u_2^t = -\frac{M_{15}}{12} (a_1^2 + a_3^2 - R^2)^2 + 2M_{63} a_1 a_3 - M_{37} \frac{a_1 a_3^3}{6} - M_{17} \frac{a_1^3 a_3}{6} + a_2 (M_{21} + M_{23} a_3 + M_{22} a_1) + \frac{a_2^2}{2} (M_{24} + M_{25} a_1^2 + M_{26} a_3^2 + M_{27} a_1 a_3) + \frac{a_2^3}{3} (M_{29} a_1 + M_{20} a_3)$$

$$u_3^t = M_{33} \frac{a_3^2}{2} + (2M_{52} - M_{13}) \frac{a_1^2}{2} + M_{51} a_1 - \frac{M_{33} R^2}{2} + M_{32} a_1 a_3 + a_2 (M_{34} a_3 + M_{35} a_1^2 a_3 + M_{36} \frac{a_3^3}{3} + M_{54} a_1 + M_{55} \frac{a_1^3}{3} + 2M_{41} + M_{37} a_1 \frac{a_3^2}{2}) + a_2^2 (M_{46} a_3^2 + \frac{1}{2} (2M_{44} - M_{23}) + (M_{45} - \frac{M_{39}}{2}) a_1^2 + M_{45} a_1^2 + M_{39} a_1 a_3) + a_2^3 (M_{38} a_3 + (-\frac{2M_{49}}{3} - \frac{M_{27}}{6}) a_1) + (2M_{48} - \frac{M_{20}}{3}) \frac{a_2^4}{4}$$

La figure 11 représente un organigramme du programme de calcul des précontraintes.

Nous avons vérifié, en prenant pour s_{ij} et c_{ij} les coefficients associés au cas isotrope, que ces expressions coïncident avec celles obtenues par Timoshenko et Love (10) dans le cas d'une plaque circulaire encastrée soumise à une pression sur une de ses faces. Nous retrouvons également dans le cas isotrope l'allure des contraintes et des déformations obtenues par Desjardins (11) (fig. 12)

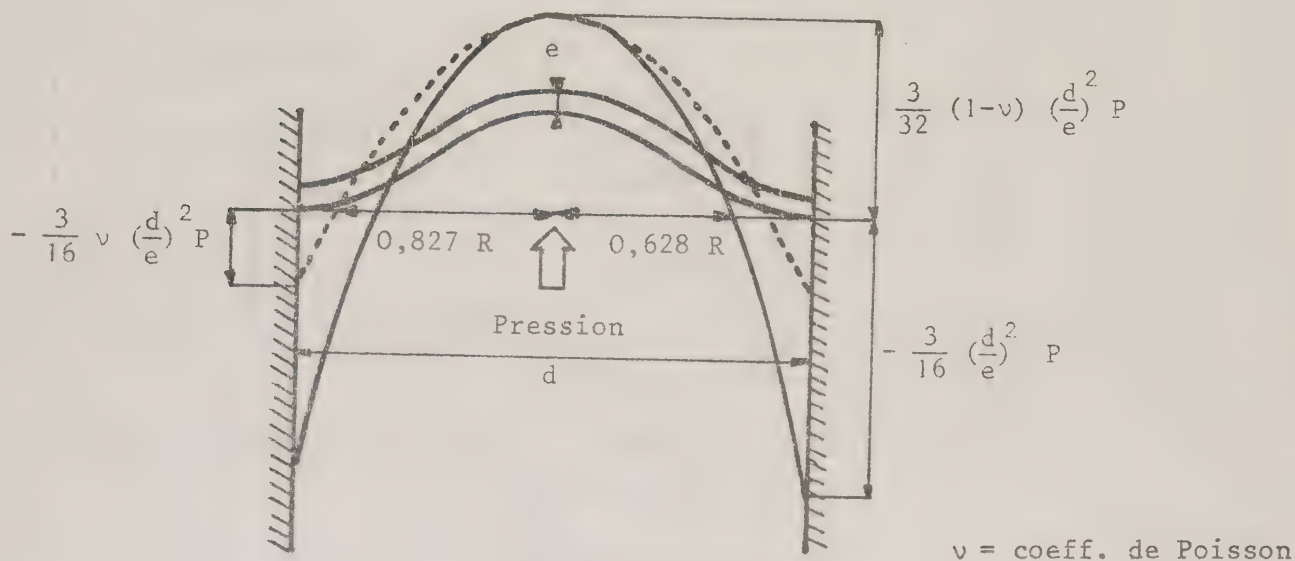


Fig. 12

Nous avons ainsi entièrement déterminé l'état de précontraintes statiques dans lequel se trouve une plaque circulaire mince encastrée, soumise à une pression. La méthode est très générale et est applicable au cas de plaques ayant une orientation cristallographique quelconque.

En particulier, la membrane peut être un substrat mince de quartz à simple ou double rotation, ou éventuellement un autre matériau anisotrope, piézoélectrique ou non. Il est cependant nécessaire que les coefficients de raideur et de souplesse du 2e ordre soient connus.

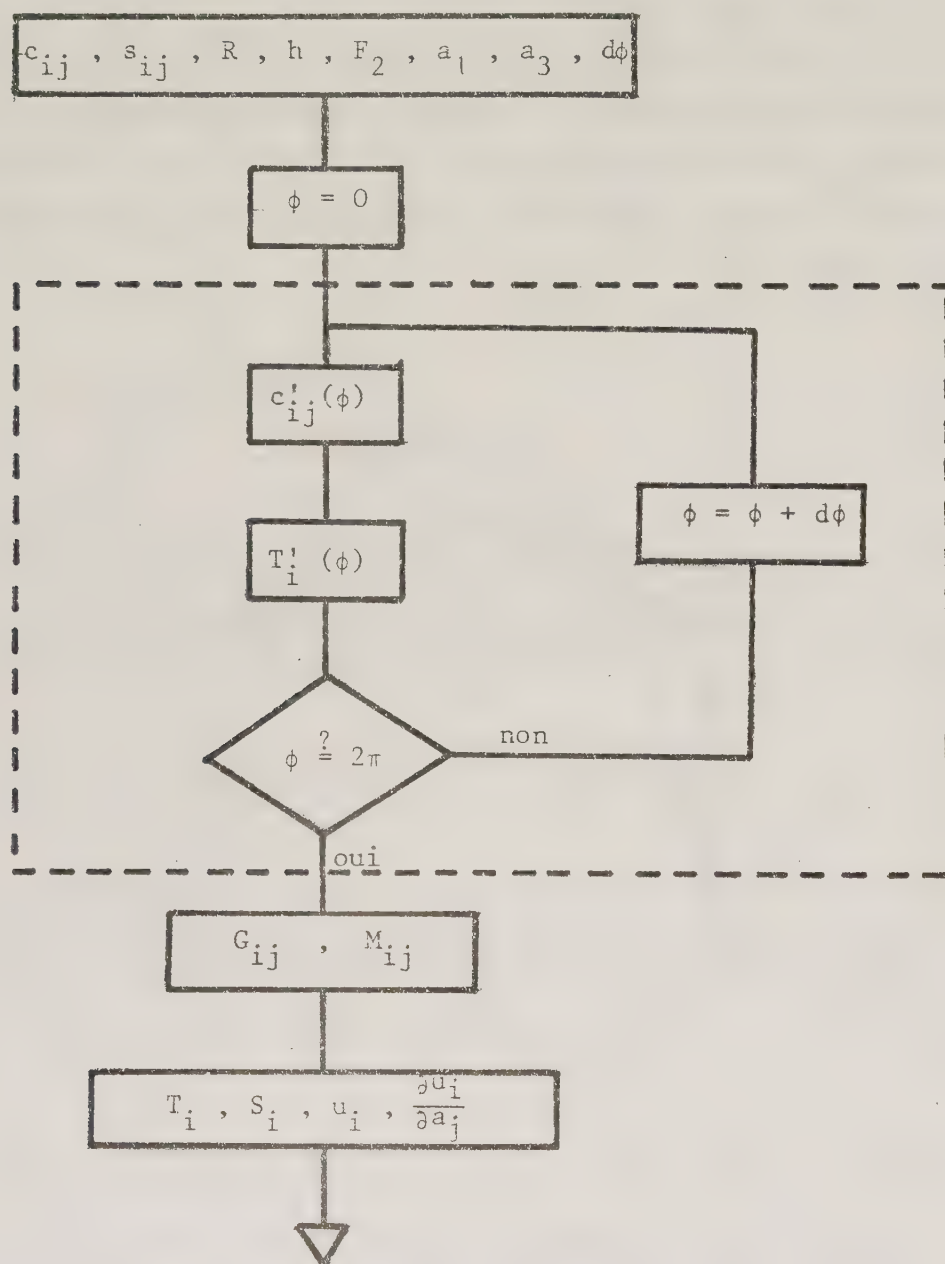


Fig. 11

Remarque : Une segmentation du programme a été nécessaire, de manière à ne pas dépasser la capacité maximale de la mémoire de l'ordinateur (128 K octets). Le temps de calcul numérique des intégrales est de 12 mn pour une coupe à simple rotation et de 25 mn pour une coupe à double rotation.

Remarque : Pour permettre un calcul de la sensibilité à la pression de membranes construites à partir d'un matériau quelconque, il est aussi indispensable de connaître les coefficients élastiques non linéaires du 3e ordre qui interviennent dans l'expression des constantes élastiques modifiées $\overline{A_{ikjm}}$.

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

-oOo-

Rappelons que les premières expérimentations d'un capteur de pression à ondes de surface ont porté sur des plaques de quartz d'une épaisseur de 3 mm environ sur lesquelles était déposée une ligne à retard, l'onde se propageant selon la direction OX. Mais la sensibilité d'un tel dispositif soumis à une pression restant faible, de l'ordre de 0,36 KHz/bar, il a paru intéressant d'amincir localement le substrat sur le trajet des ondes pour en augmenter la sensibilité (8).

Dans ce cadre, plusieurs configurations ont été étudiées, faisant appel à une ou deux membranes sur le même substrat et à une ou deux lignes sur une même membrane.

A - ASPECT TECHNOLOGIQUE

1°) FABRICATION DES MEMBRANES

Deux modèles de membranes ont été utilisées, chacun ayant ses avantages et ses inconvénients : les essais ont tout d'abord porté sur une membrane à encastrement monolithique (fig. 13, photo 1).

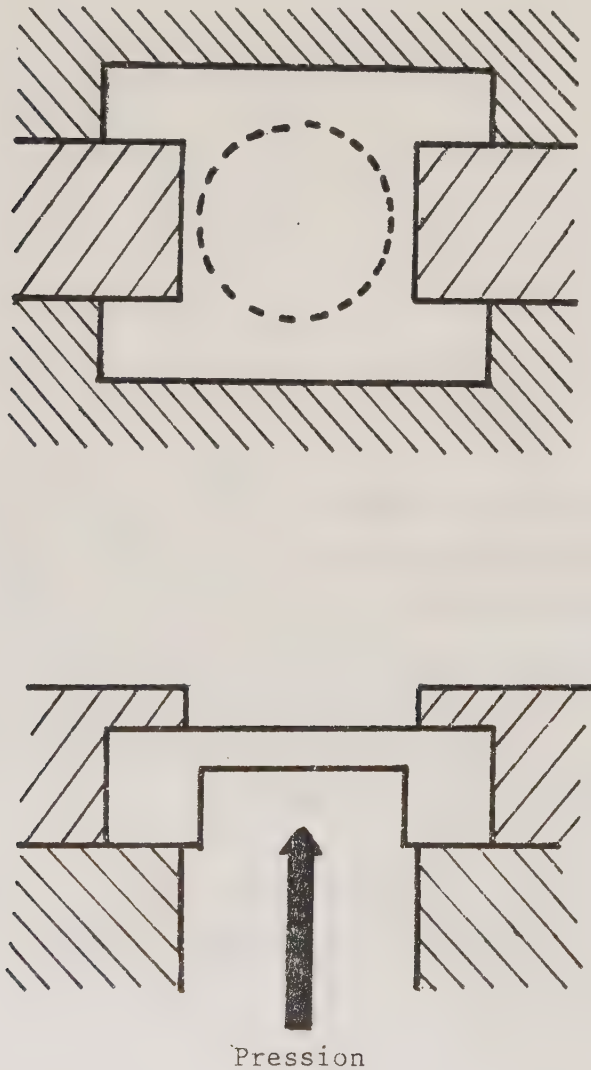


Fig. 13

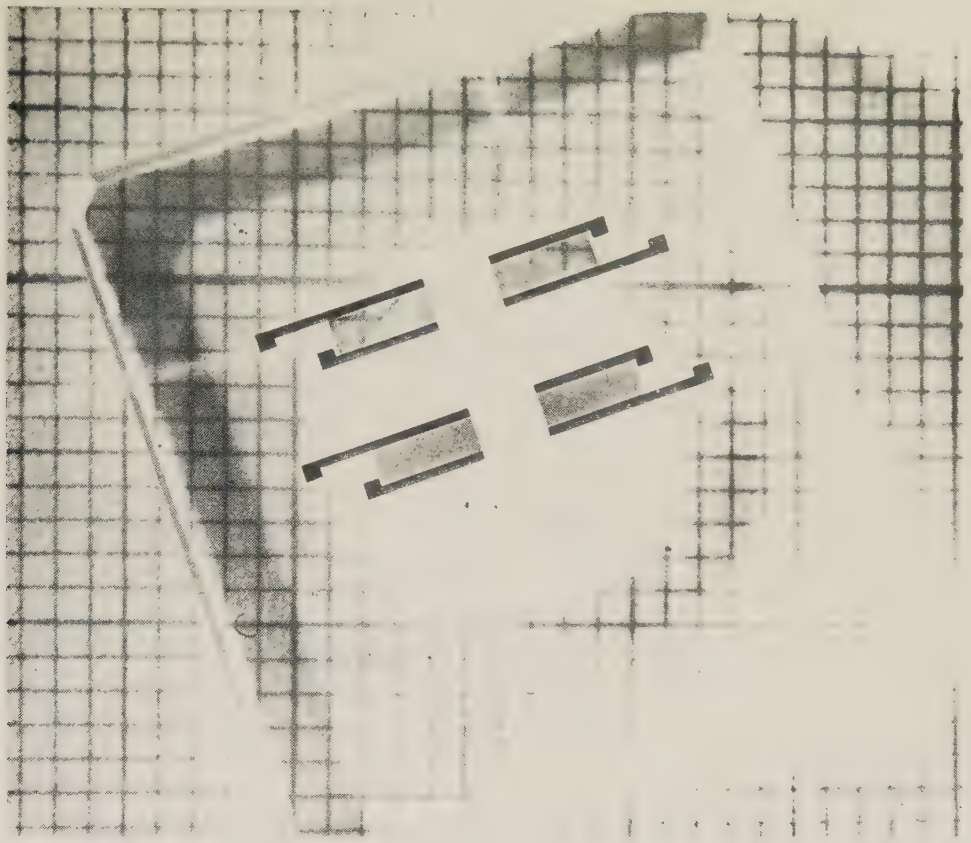


Photo 1 .

Membrane d'encastrement monolithique

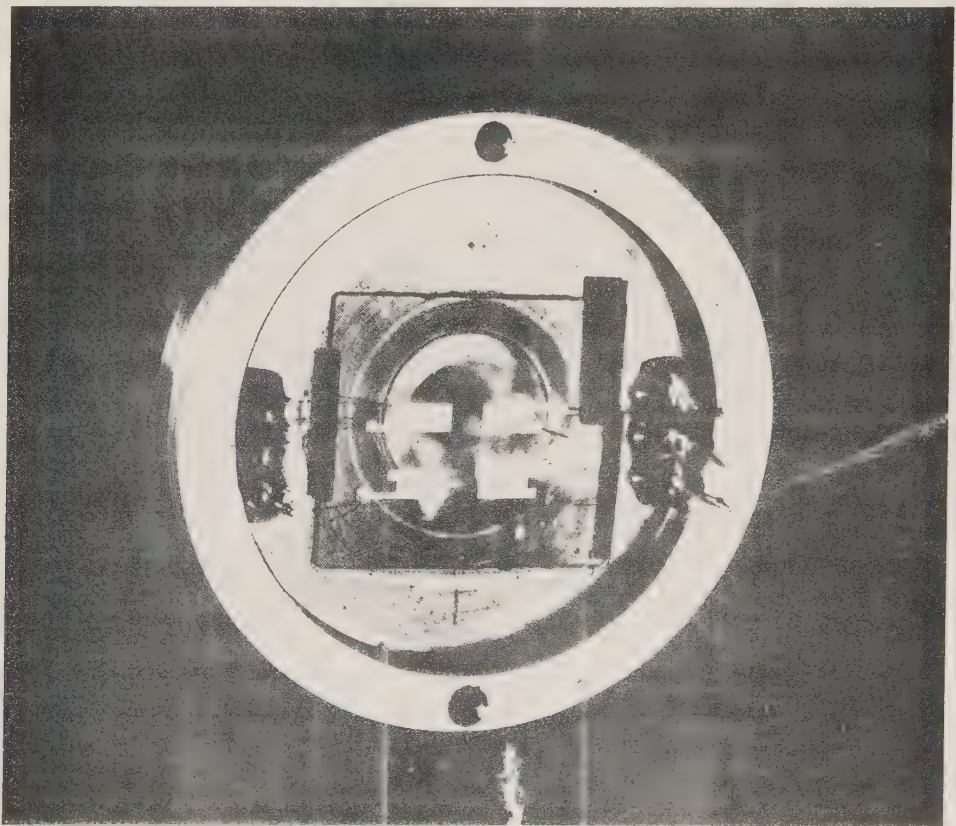


Photo 2 .

Membrane collee

Ensuite, en vue de l'industrialisation, le L.C.R. s'est intéressé à une plaque très fine de quartz collée sur un support percé d'un trou circulaire, délimitant la zone sensible à la pression (fig. 14, photo 2).

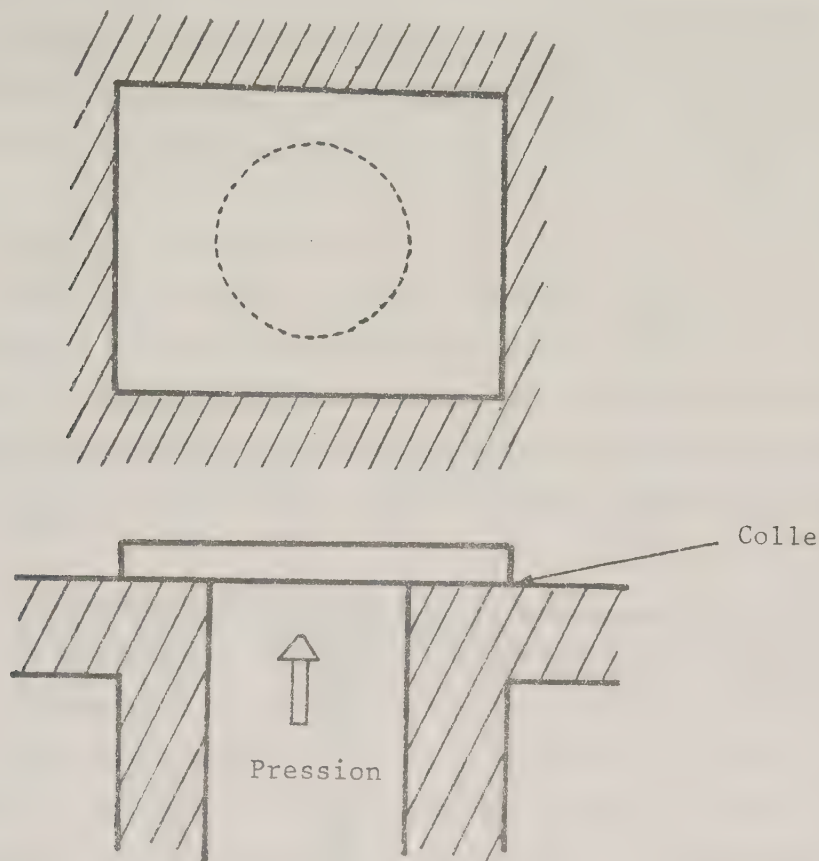


Fig. 14

La fabrication d'une membrane collée ne présente pas de difficulté particulière. Mais l'inconvénient majeur de ce système est la présence de la colle, jouant un rôle important en ce qui concerne la nature de l'encastrement et la stabilité en température.

En revanche, la fabrication d'une membrane à encastrement monolithique est plus délicate et nécessite la mise en oeuvre de moyens technologiques importants.

Deux méthodes ont été employées :

- la première consiste à usiner par ultrasons un trou borgne dans un substrat ayant une épaisseur d'environ 3 mm. Il reste alors une épaisseur de quartz d'environ 800 μ qui est réduite à une ou deux centaines de microns par un polissage de la surface. Tout ceci nécessite un temps de travail assez long, la vitesse de polissage devant être faible à cause de la flexibilité de la membrane. La précision obtenue est de 5 microns.

- le deuxième procédé consiste à commencer par polir la surface du quartz. Ensuite, le trou borgne est usiné par ultrasons jusqu'à 800 μ . Puis, c'est une meulette diamantée, introduite dans le trou, qui donne à la membrane son épaisseur définitive. Cette méthode présente l'avantage d'être plus rapide et plus précise (2 microns) que la précédente.

Les transducteurs sont photogravés sur la face polie de la membrane et du substrat. La pression est normalement appliquée sur la face ne comportant pas la ligne à retard, ce qui permet d'éviter un contact direct entre la surface de propagation de l'onde et le gaz ou le liquide dont on mesure la pression. Ainsi, la variation de la vitesse de propagation, donc de la fréquence, est totalement indépendante de la nature du milieu dont on veut déterminer la pression. De plus, si l'on fait le vide au-dessus des transducteurs, la mesure est absolue.

2°) LES CONTACTS ELECTRIQUES

Les contacts sont pris sur les transducteurs par des fils en aluminium de 25 microns, soudés par ultrasons. Les contacts avec le boîtier sont réalisés par des fils en cuivre de 1/10 de mm (fig. 15).

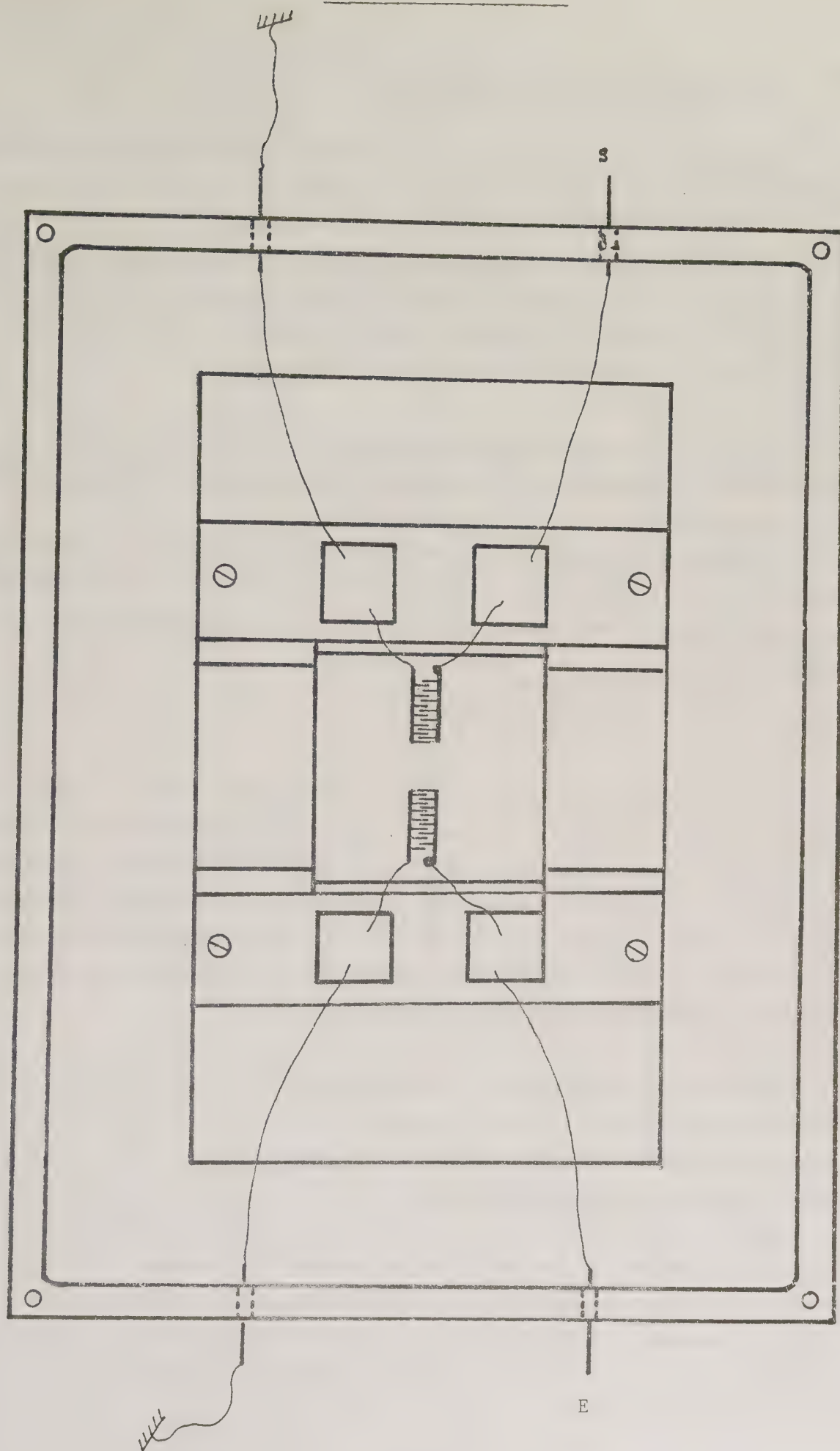


Fig. 15

3°) LES DISPOSITIFS DE MESURE

Les essais ayant porté sur des mesures de pression et des mesures de température, deux dispositifs ont été utilisés.

La figure 16 montre le principe de montage utilisé pour les mesures de la sensibilité à la pression. Seule la ligne à retard est soumise à des pressions dont l'élévation maximale est de l'ordre de 1 à 2 bars, afin de ne pas risquer une éventuelle rupture de la membrane.

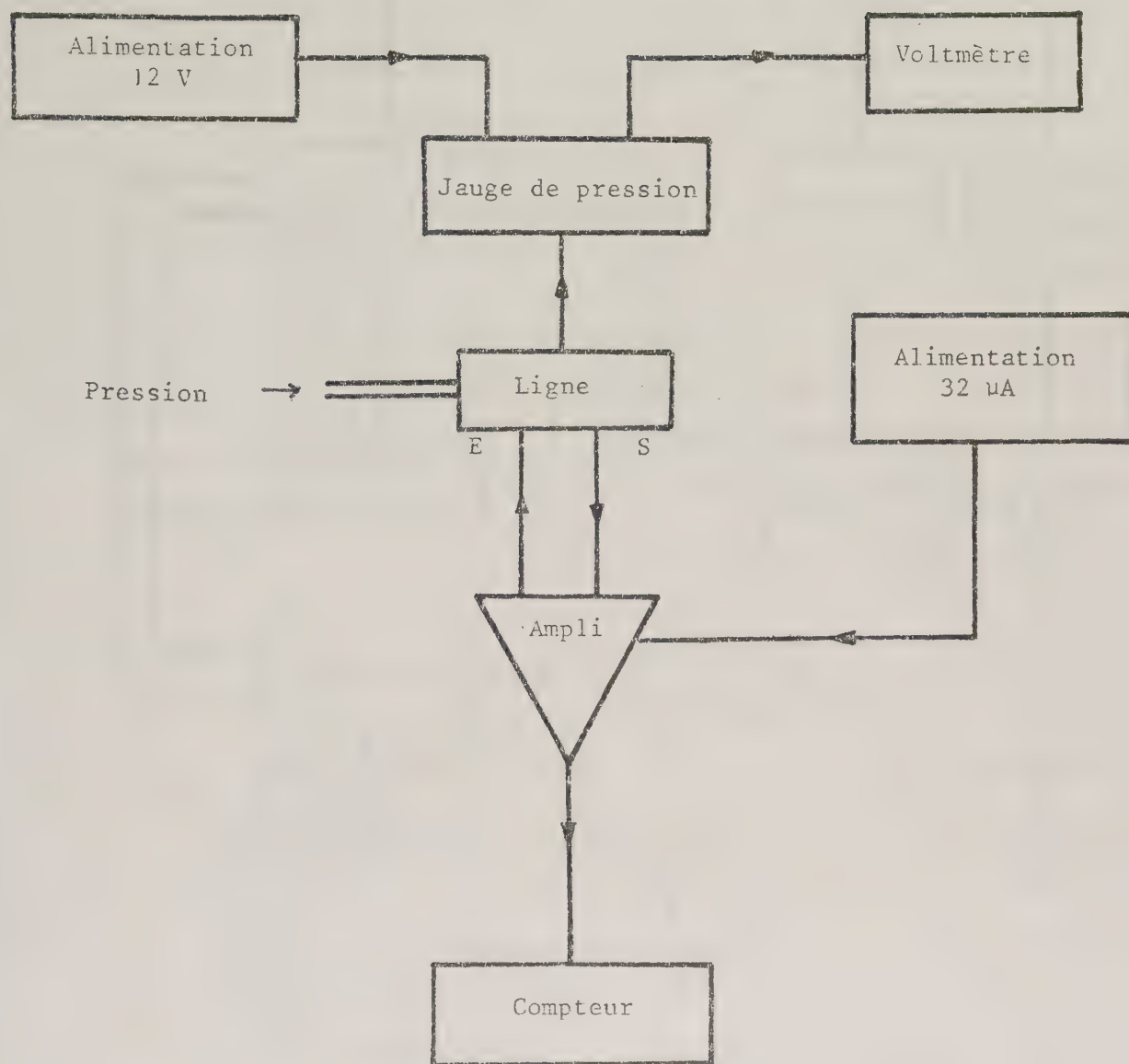
La figure 17 représente le dispositif de mesure de la réponse en température de la fréquence de la ligne, tel qu'il a été réalisé au L.P.M.O.

La ligne étant soumise aux variations de température, la condition de phase est telle que toute modification de la vitesse et de la longueur se traduit par une variation correspondante de la fréquence suivant la relation :

$$\Phi_L = \omega \tau = \omega \frac{L}{V} = \text{constante.}$$

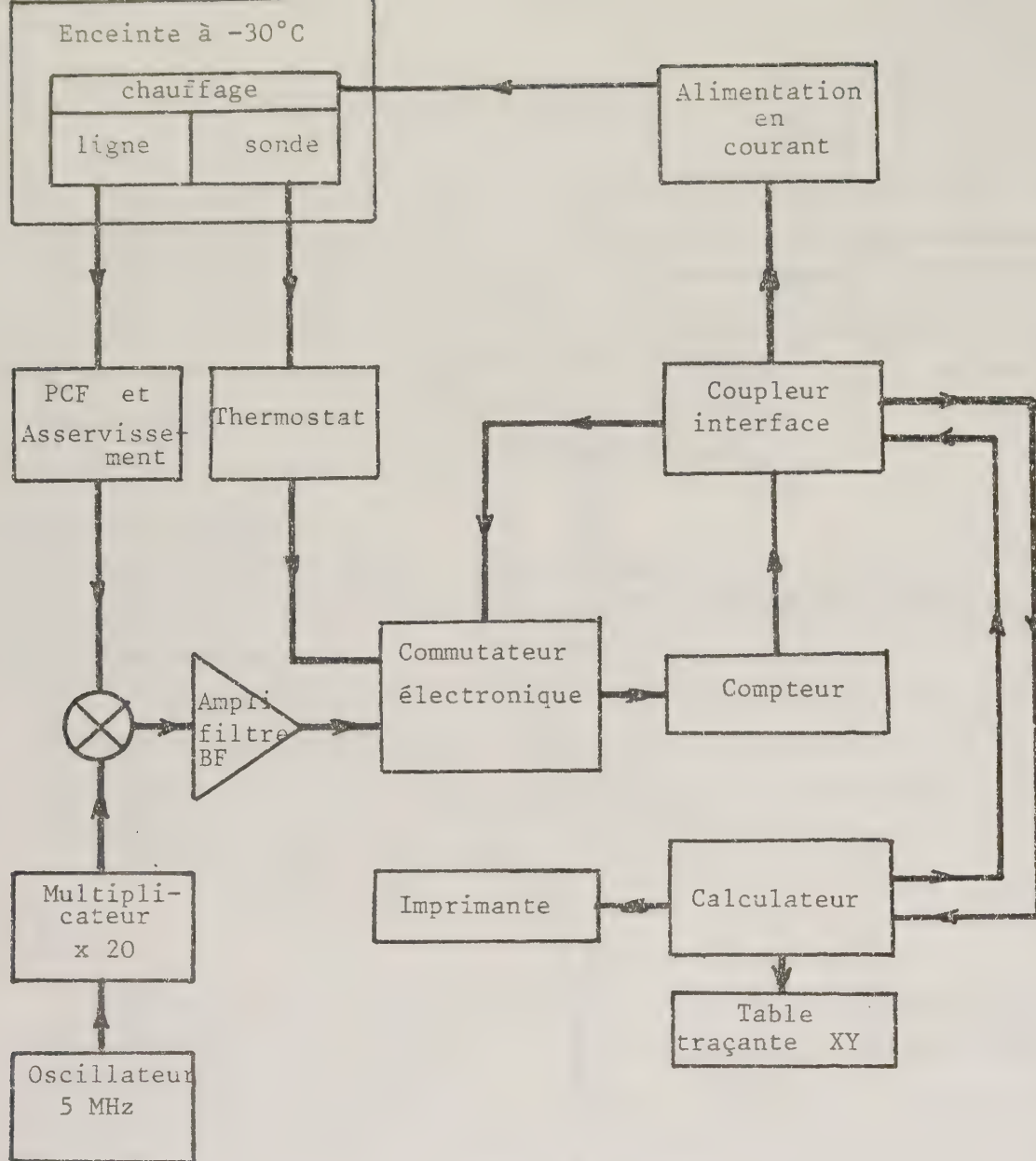
Dans le dispositif de mesure qui a été utilisé, seule la ligne à retard est soumise aux variations de la température, l'électronique d'asservissement étant conservée à la température ambiante. Elle est placée dans une enceinte à température contrôlée, constituée d'un cylindre d'aluminium qui est chauffé au moyen d'un enroulement résistif bobiné sur toute sa surface latérale. Cette enceinte est placée dans un congélateur qui permet de disposer d'une température initiale proche de -30°C .

La sonde thermométrique est un résonateur à quartz à onde de volume. Elle permet de mesurer à chaque instant la valeur de la température à l'intérieur du boîtier contenant la ligne avec une précision égale à $0,001^{\circ}\text{C}$. Cette sonde de température est placée dans un oscillateur qui délivre donc une fréquence proportionnelle à la température à mesurer. Un commutateur électronique permet de compter alternativement la fréquence de la ligne à onde de surface et la fréquence proportionnelle à la température. Un calculateur commande d'une part le basculement du commutateur sur l'une ou l'autre des voies et d'autre part le chauffage de l'enceinte après la prise des deux informations.



DISPOSITIF DE MESURE DE LA CARACTERISTIQUE
FREQUENCE-PRESSION

Fig. 16



DISPOSITIF DE MESURE DE LA CARACTERISTIQUE
FREQUENCE-TEMPERATURE

Fig. 17

Nous obtenons ainsi, soit les valeurs de la fréquence à certaines températures fixes, soit directement la caractéristique "fréquence - température".

B - INTERPRETATION DE LA THEORIE

La théorie développée au chapitre II (1ère partie) permet de calculer la variation de fréquence en chaque point situé sur le parcours de l'onde. La valeur mesurée correspond à la moyenne de ces variations ponctuelles d'une part sur la distance de parcours et d'autre part sur la largeur des transducteurs (fig. 18).

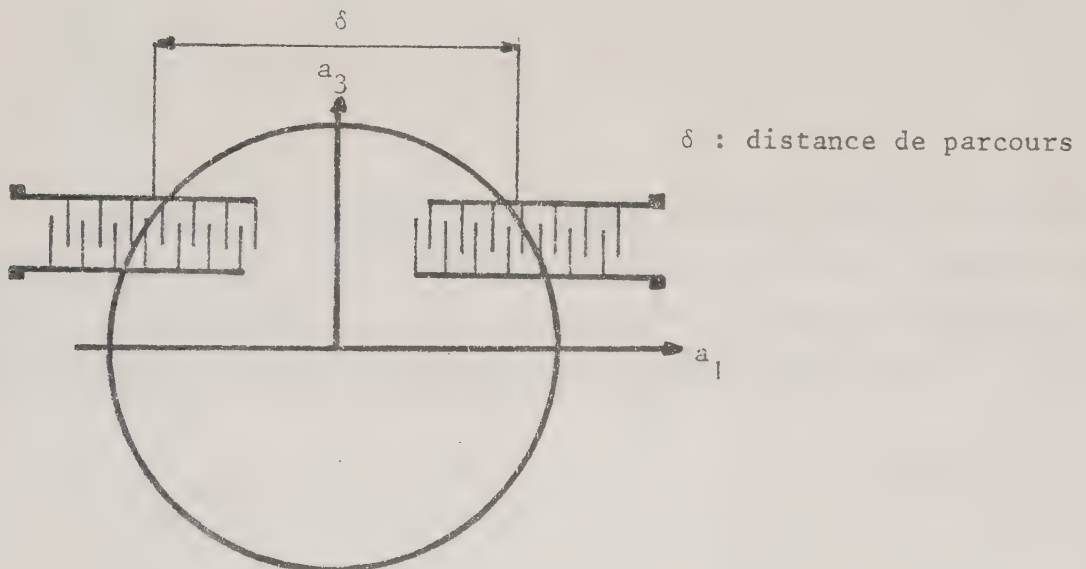


Fig. 18

Notons que la distance de parcours peut se trouver en partie non plus sur la membrane, mais sur le substrat où la variation de fréquence est nulle, ce qui va entraîner un affaiblissement de la variation de fréquence moyenne.

CHAPITRE II

MEMBRANES COMPORTANT UNE SEULE LIGNE À RETARD

-o0o-

Après les généralités sur les aspects technologiques de fabrication des membranes ainsi que sur les dispositifs utilisés pour les mesures de pression et de température, nous allons aborder l'aspect expérimental et comparer les prévisions théoriques aux valeurs obtenues lors des mesures.

Les études ont porté sur des coupes Y et des coupes ST. Les pertes d'insertion de la ligne (sans adaptation) sont de l'ordre de 10 dB pour des transducteurs constitués de 200 dents. La fréquence d'oscillation est de 105 MHz et l'onde se propage selon l'axe cristallographique OX (fig. 19). Les membranes sont à encastrement monolithique, la plaque de quartz étant collée sur le boîtier avec une résine époxy.

Nous voyons (fig. 20) le masque utilisé pour la coupe ST et (fig. 21) celui utilisé pour la coupe Y.

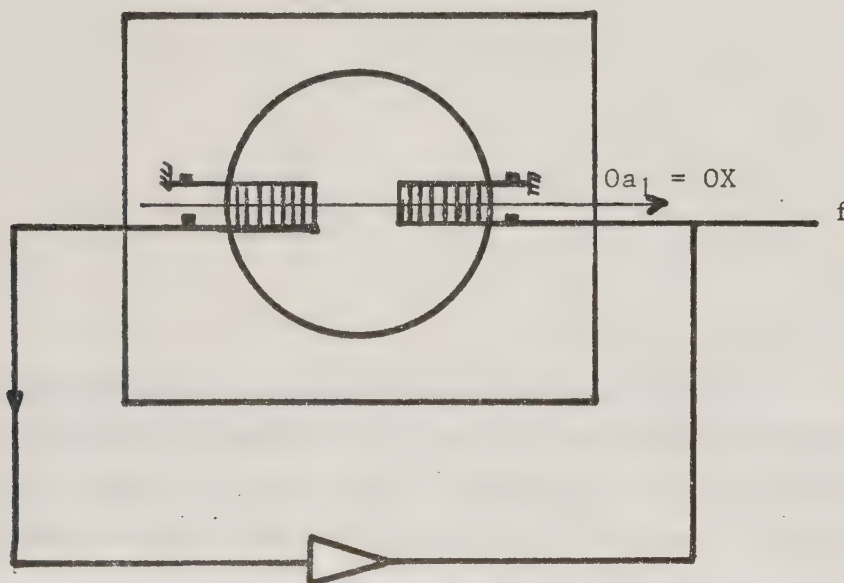


Fig. 19

1°) INFLUENCE DE LA PRESSION

Les courbes théoriques donnant les variations ponctuelles de fréquence pour les deux plaques étudiées sont données sur la figure 22. Nous regroupons dans le tableau ci-après les variations moyennes de fréquence obtenues à partir de ces courbes, ainsi que les valeurs correspondantes mesurées.

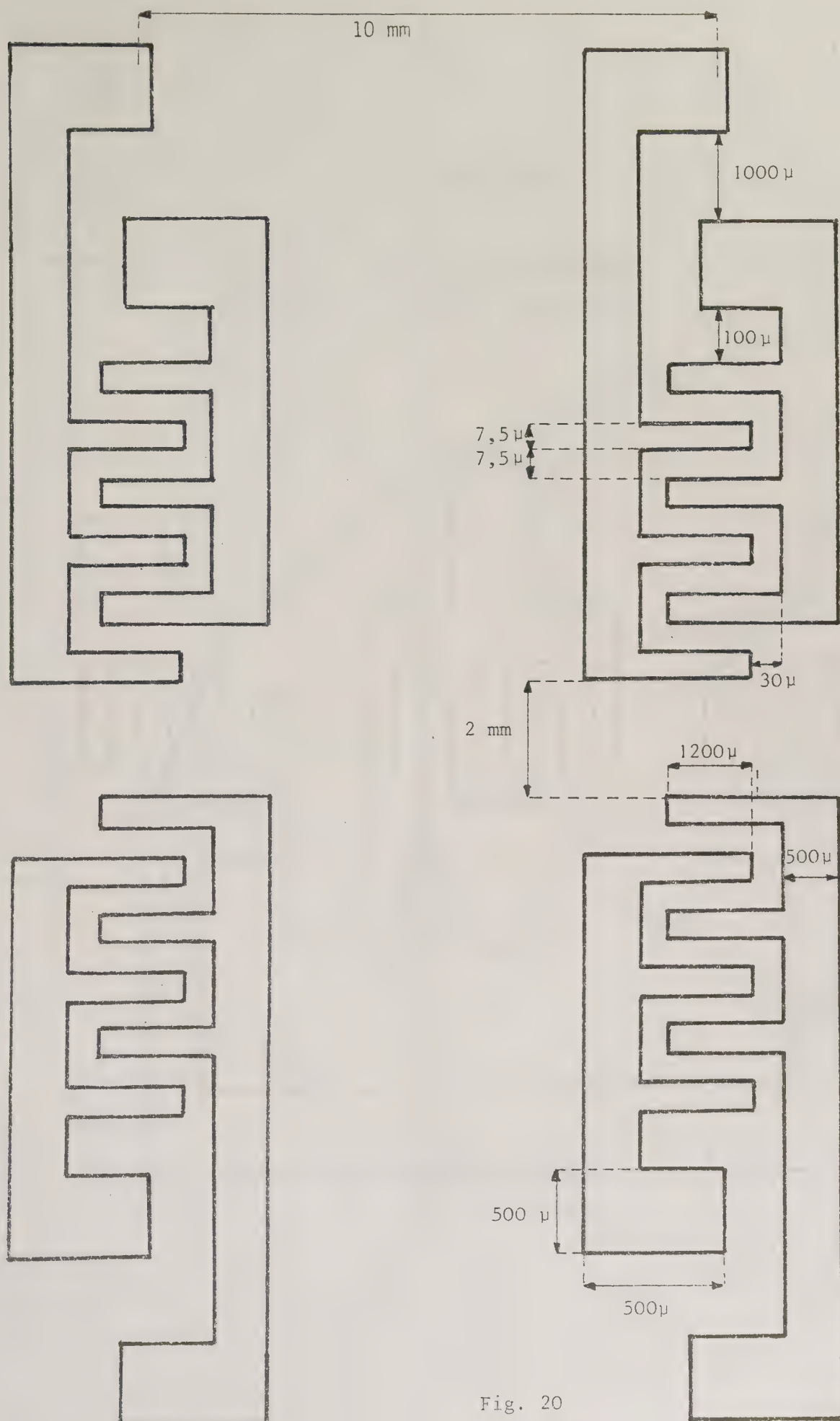


Fig. 20

MASQUE ONAC 2

Transducteurs latéraux : 100 dents

Transducteur central : 101 dents

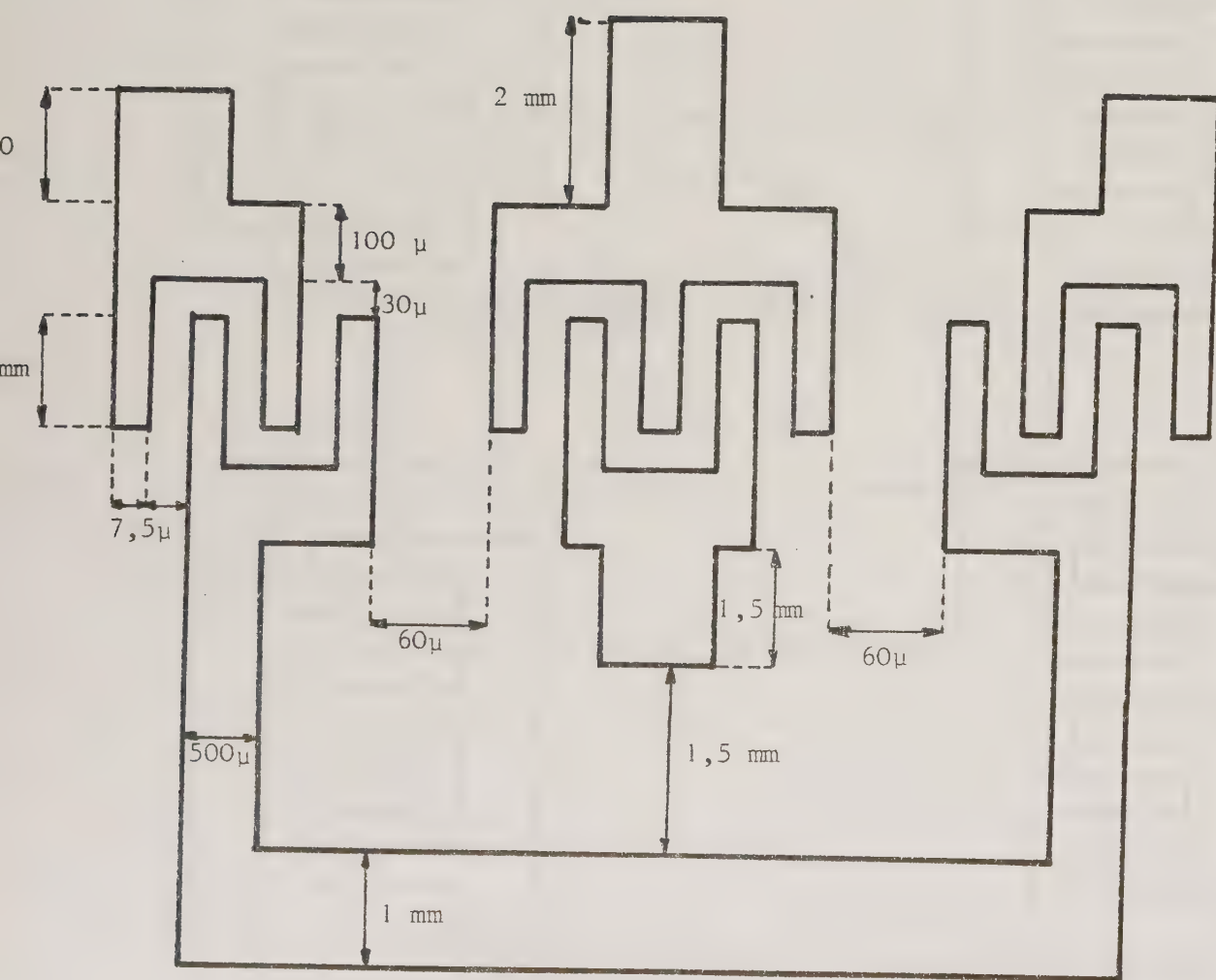
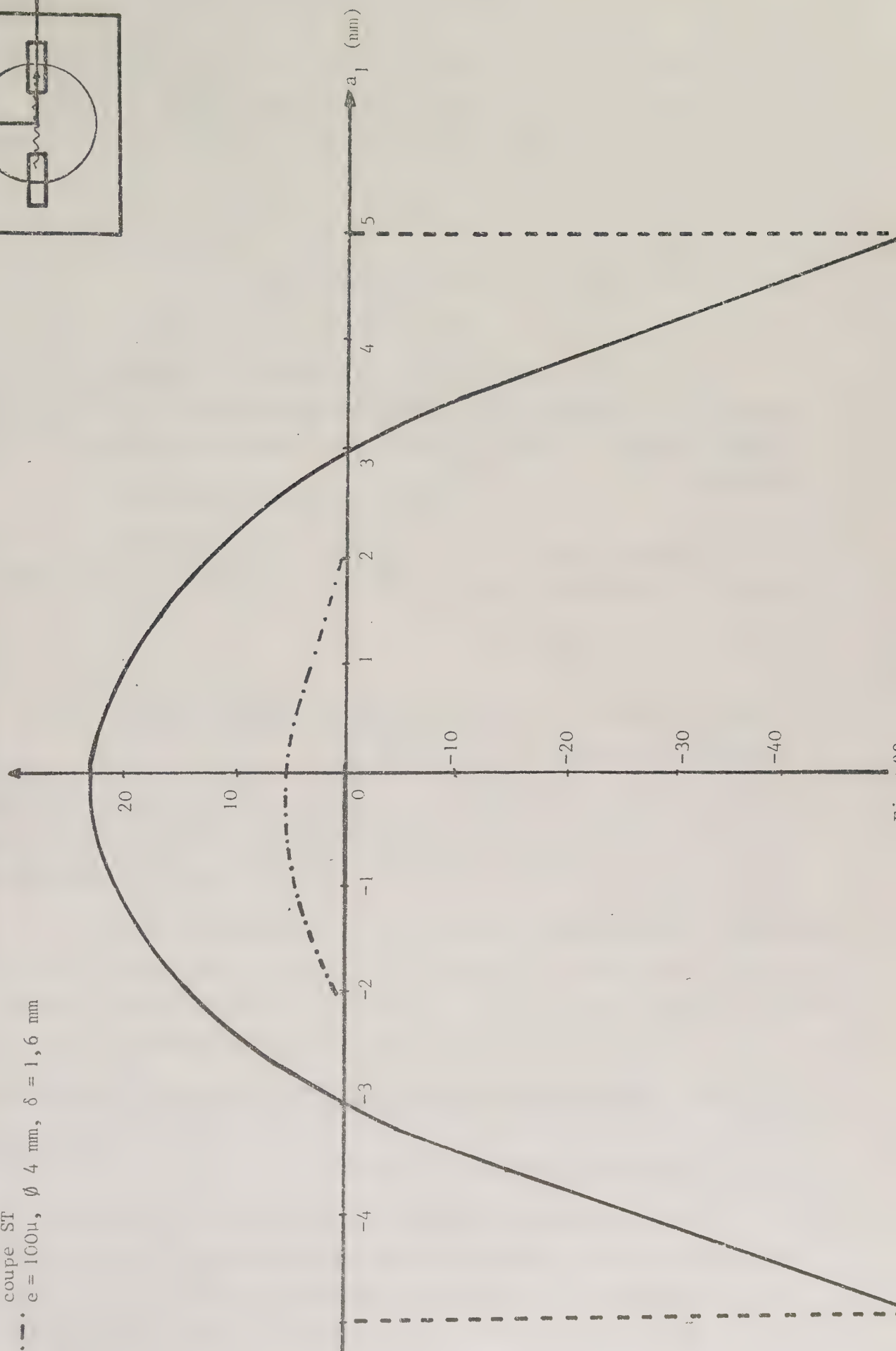


Fig. 21

coupe Y
 $e = 246 \mu$, $\phi 10 \text{ mm}$, $\delta = 5 \text{ mm}$
 coupe ST
 $e = 100 \mu$, $\phi 4 \text{ mm}$, $\delta = 1,6 \text{ mm}$

Variation de fréquence (KHz/bar)



Coupe	τ μ s	f MHz	e μ	$\emptyset$ mm	ΔF expéri- mental	ΔF théo- rique
Y	1,58	105	246	10	+17	+16,5
ST	0,49	105	100	4	+ 2,9	+ 5,7

Ces résultats montrent que la présence de la membrane accroît considérablement la sensibilité du dispositif et que cette sensibilité dépend, comme le prévoit la théorie, de la coupe du quartz et des paramètres géométriques.

Il apparaît que, si d est le diamètre de la membrane et e son épaisseur, la variation de fréquence suit pratiquement une loi de la forme :

$$f = k \frac{d^2}{e^2},$$

k étant un coefficient de proportionnalité dépendant de la coupe et de la position de la ligne sur la membrane.

Bien que réalisant de bonnes performances en pression, ce modèle de capteur présente l'inconvénient d'être peu stable en température et donc ne permet pas une mesure précise de la pression dans des conditions d'environnement variables.

2°) CARACTERISTIQUE FREQUENCE-TEMPERATURE POUR UNE MEMBRANE

a) Cas de la coupe ST,X du quartz

La caractéristique fréquence-température d'une lame massive de coupe ST (direction de propagation X) est une parabole dont le point d'inversion est au voisinage de la température ambiante. Le coefficient de température du 1er ordre est équivalent à zéro et celui du second ordre est égal à $-39 \cdot 10^{-9} / ^\circ\text{C}^2$.

Lorsque la lame est amincie dans sa partie centrale pour former une membrane, la caractéristique fréquence-température devient quasiment linéaire et la valeur mesurée du coefficient de température du premier ordre devient égale à $-6,9 \text{ ppm}/^{\circ}\text{C}$. (mesure LCR). Cet effet résulte des forces de dilatation thermiques qui sont exercées sur toute la périphérie de la membrane par la partie massive, suivant la figure 23.

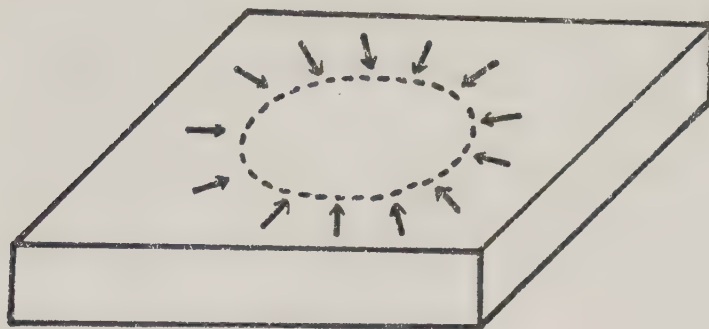


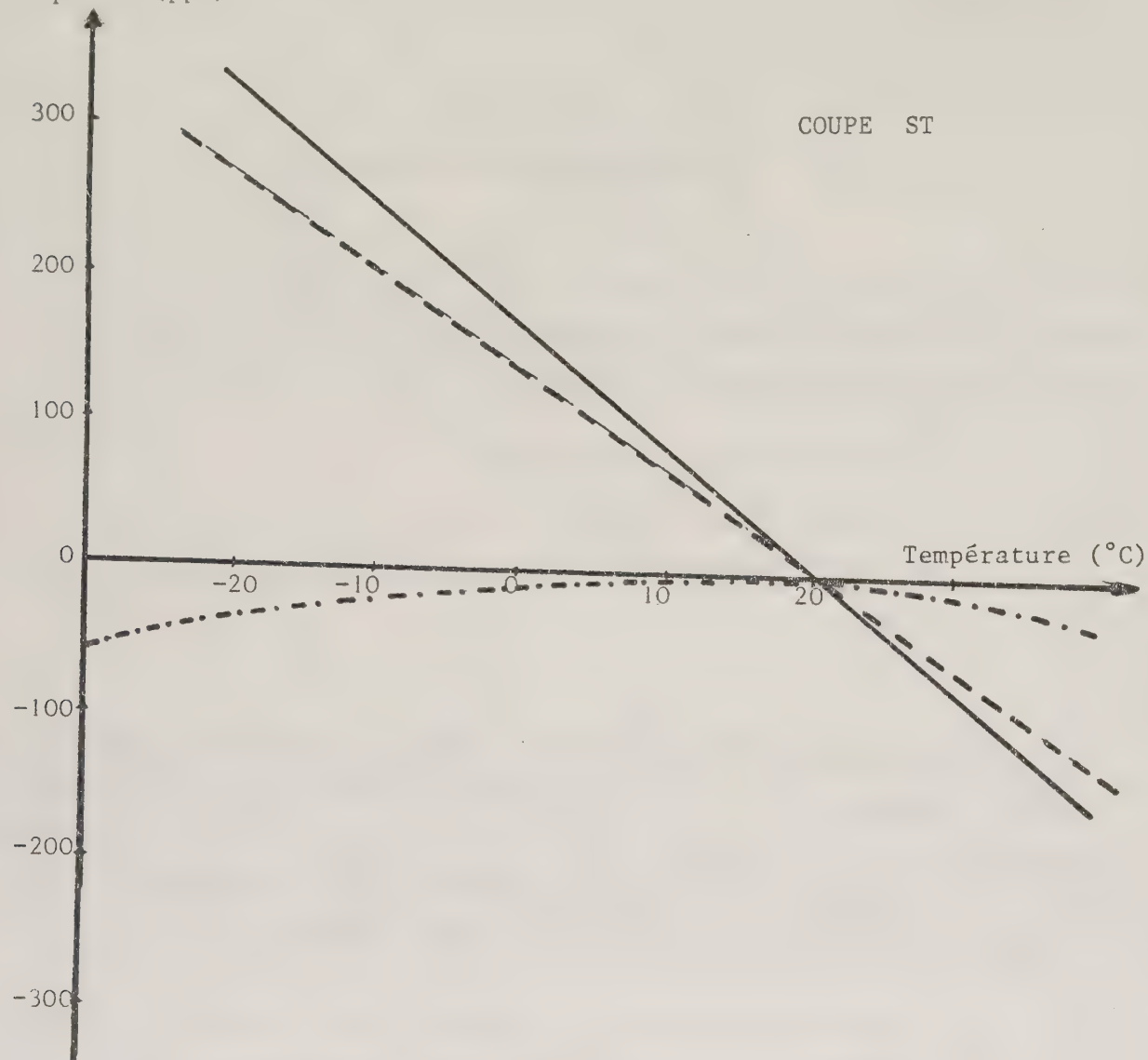
Fig. 23

La membrane circulaire est ainsi soumise à une force radiale uniformément répartie sur sa circonférence. L'intensité de cette force est proportionnelle à la température. Cette prédéformation modifie l'état élastique de la lame mince cristalline et également par couplage non linéaire change la vitesse de propagation des ondes de surface.

Le calcul correspondant de la sensibilité du dispositif à des variations de température est alors effectué avec les mêmes conditions aux limites que celles décrites précédemment : plaque mince rigidement encastrée et qui ne tourne pas autour d'un quelconque de ses diamètres.

Les résultats comparatifs concernant la coupe ST,X sont présentés sur la figure 24.

Variation relative
de fréquence (ppm)



— Valeurs théoriques : $\alpha_f^{(1)} = -7,8 \text{ ppm/}^\circ\text{C}$ } membrane
 - - - valeurs expérimentales $\alpha_f^{(1)} = -6,9 \text{ ppm/}^\circ\text{C}$ } circulaire
 - · - · - substrat massif $\alpha_f^{(1)} = 0$

Fig. 24

b) Modification de la caractéristique en fonction de l'orientation du cristal

La figure 25 représente l'évolution du coefficient de température du 1er ordre en fonction de l'angle θ définissant les coupes à simple rotation obtenues à partir de la coupe Y par rotation autour de l'axe cristallographique $\vec{OX}$. Les valeurs du coefficient de température d'un substrat massif sont en pointillé. Les valeurs modifiées par l'amincissement au centre de la lame sont portées en trait continu.

Cet effet modifie peu le coefficient de température de la coupe Y ($\theta = 0^\circ$). Par contre, les effets statiques de la température dans le cas de membranes de quartz de coupes à simple rotation telles que les coupes ($Y - 42^\circ$) et ($Y + 62^\circ$) deviennent minimaux et celles-ci sont utilisables pour des dispositifs de mesure qui ne comportent qu'une seule ligne.

Afin d'éliminer au maximum les effets de la température et ceci quelle que soit la coupe du quartz considérée, une deuxième ligne à retard a été utilisée comme référence de fréquence auxiliaire pour des mesures différentielles.

Cette configuration permet d'éliminer en grande partie les variations de fréquence indésirables dues aux effets de température.

B - CAPTEUR A DEUX MEMBRANES ET A DEUX LIGNES

Deux membranes de même dimension sont usinées dans un substrat épais. Ensuite des transducteurs identiques sont déposés sur chacune d'elles (fig. 26 - photo 3).

MODIFICATION DU COEFFICIENT DE TEMPERATURE DU PREMIER ORDRE
PAR LES CONTRAINTES INDUITES PAR LES VARIATIONS DE TEMPERATURE

COUPES ($Y \pm \theta$)

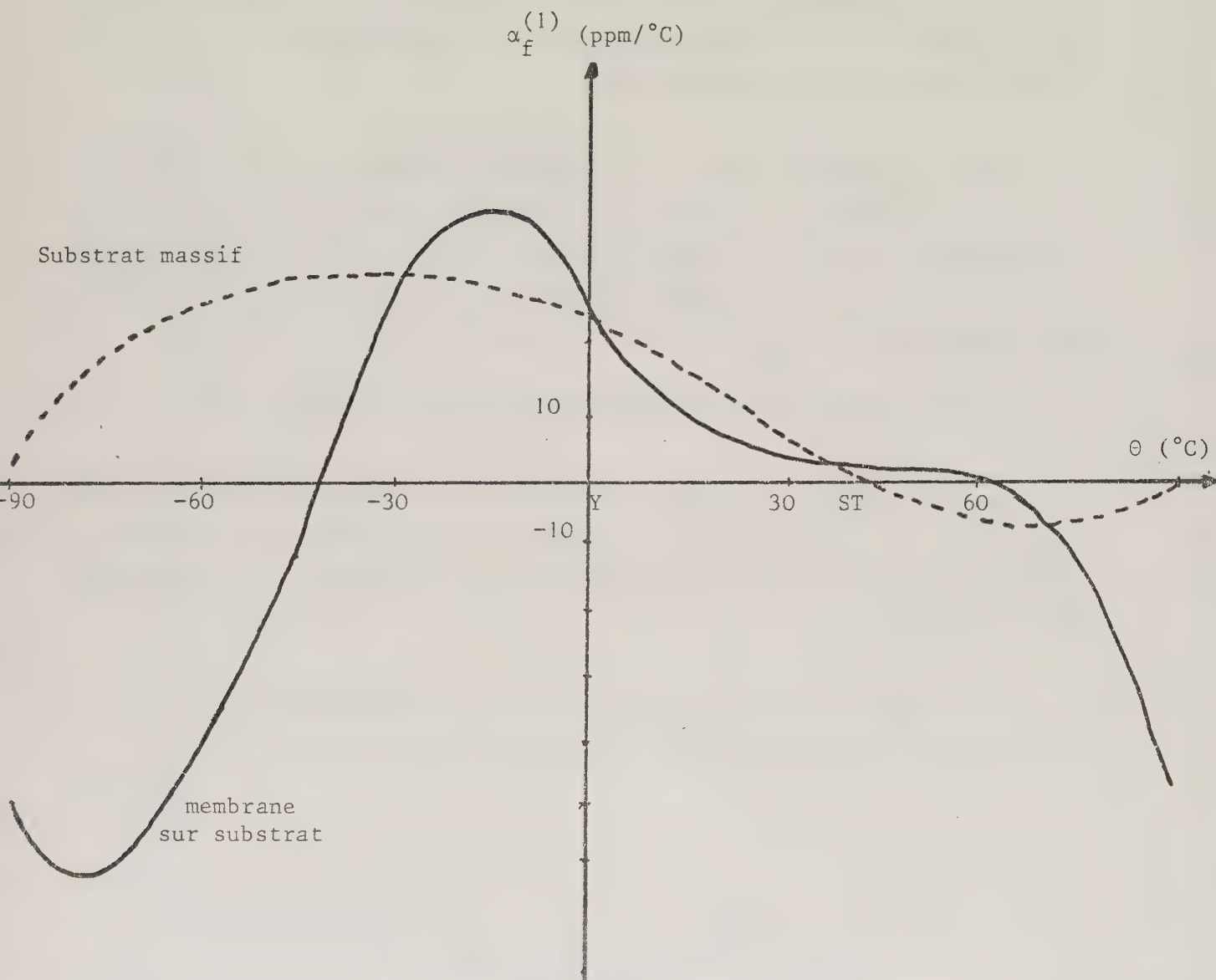


Fig. 25



Photo 3

Dispositif à deux membranes

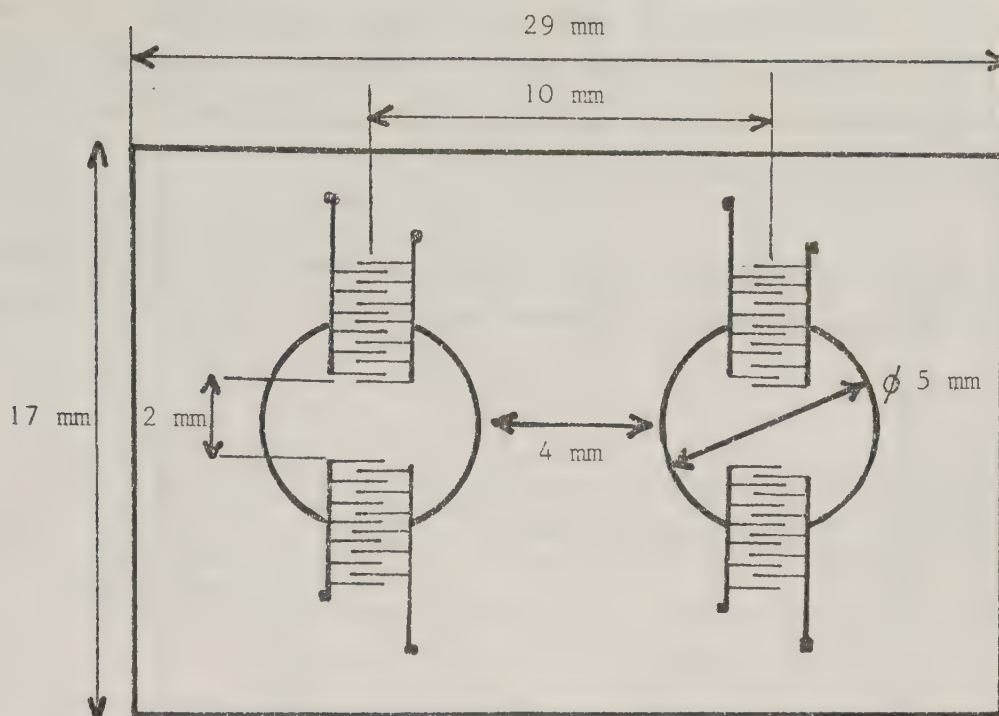


Fig. 26

Les tensions fournies par les deux oscillateurs sont mêlées. Le signal à la fréquence différence est filtré et une fréquence, de l'ordre de quelques KHz, est alors mesurée (fig. 27).

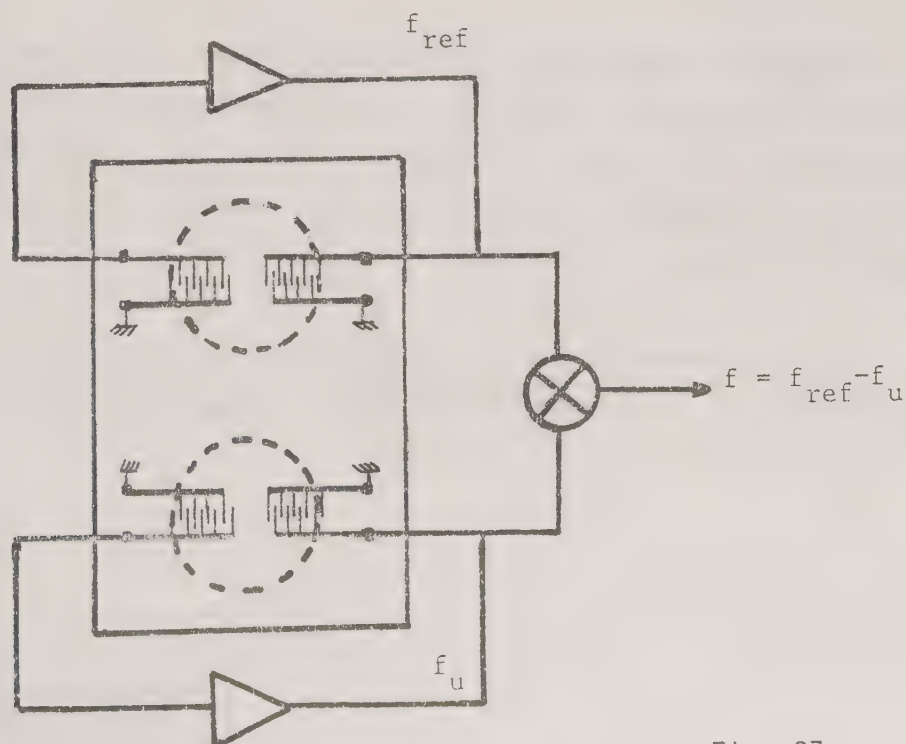


Fig. 27

En principe, si les membranes et les transducteurs sont identiques et donc, si la fréquence de sortie de chaque oscillateur est la même, la dérive en température doit être nulle. En fait, la fréquence différence varie légèrement vu l'imprécision sur l'usinage des membranes et sur l'orientation des transducteurs (fig. 28).

Les divers résultats obtenus lors des essais en pression sont donnés dans le tableau suivant et comparés aux valeurs prévues par la théorie.

Fréquence d'oscillation (MHz)	Coupe	Epaisseur (μ)	Diamètre (mm)	Temps de retard (μ s)	ΔF expérimentale (KHz/bar)	ΔF théorique (KHz/bar)
105	Y	141	6	1,58	+ 18	+ 19,8
83	Y	167	6,4	1,8	+ 5,2	+ 7
83	Y	218	7,6	1,8	+ 4,8	+ 3
82	ST	165	7,6	1,7	2,3	+ 5

Ce modèle présente donc l'avantage d'être stable en température et de présenter une bonne sensibilité à la pression. Mais d'une part il nécessite l'emploi d'un substrat de grandes dimensions et d'autre part, l'usinage des deux membranes est long et onéreux tout en ne permettant pas de les obtenir identiques.

Aussi ce dispositif a été remplacé par un autre ne comportant qu'une seule membrane, tout en restant stable en température et en réalisant de très bonnes performances en pression.

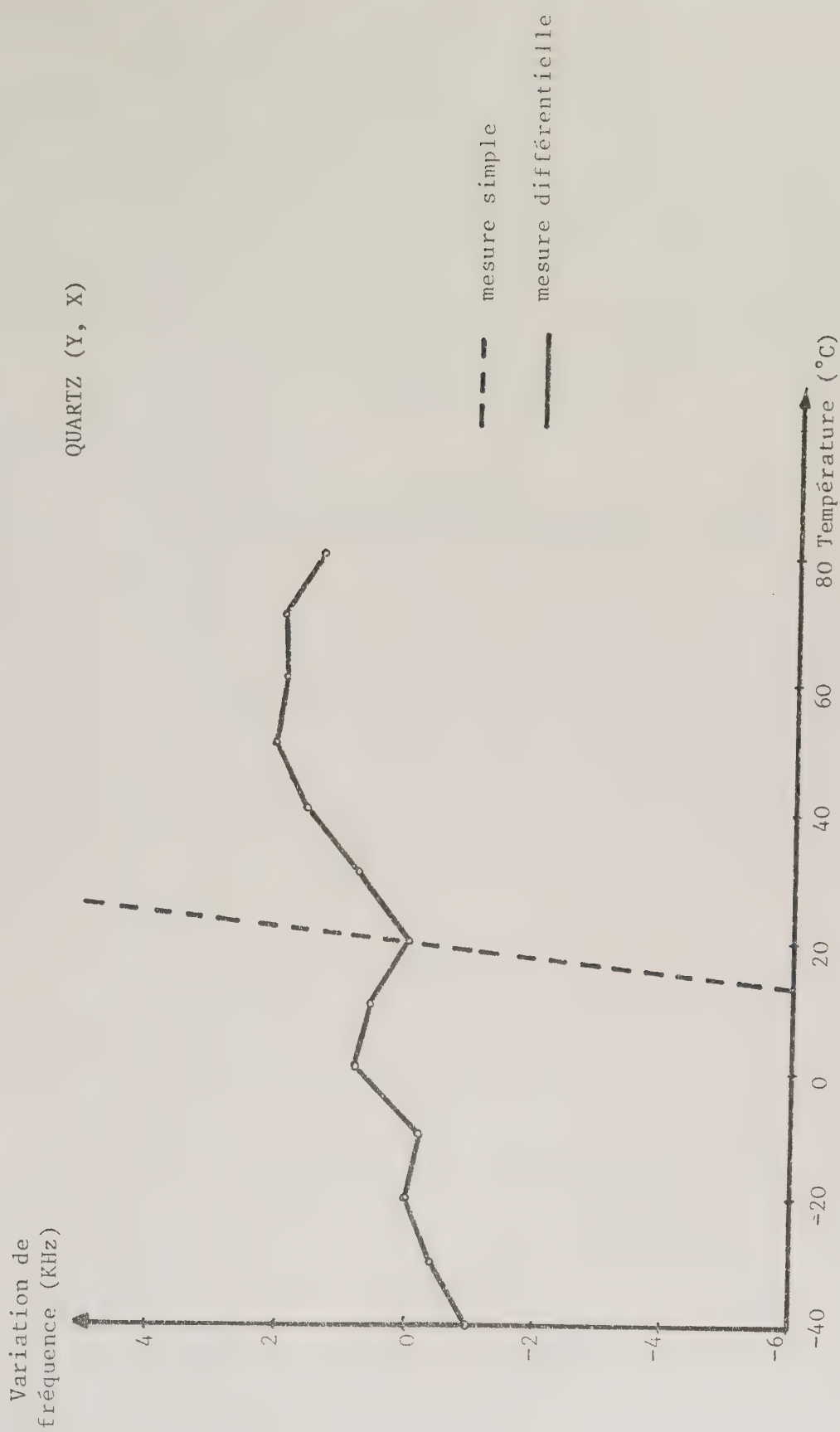


Fig. 28

CHAPITRE III

CAPTEURS À UNE MEMBRANE ET DEUX LIGNES

-oOo-

Le principe de ces capteurs consiste à déposer deux lignes à retard sur une même membrane, ce qui permet d'éliminer la dérive en température et donc d'avoir un dispositif bien stable en pression.

Des membranes circulaires et des membranes rectangulaires ont été étudiées.

A - CAS D'UNE MEMBRANE RECTANGULAIRE

La membrane testée est en coupe Y et a une épaisseur de $150\ \mu$. La fréquence d'oscillation est de 105 MHz.

La première ligne est disposée sur l'axe central OX, la seconde ligne étant située à une distance voisine de 4 mm (fig. 29).

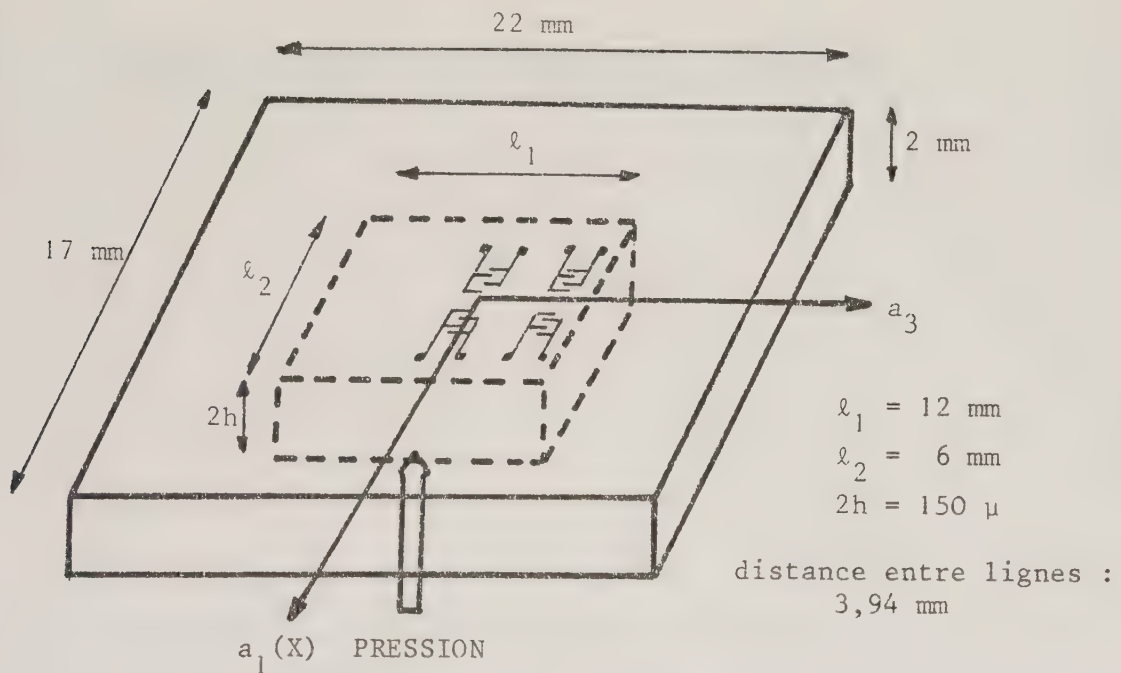


Fig. 29

La figure 30 montre les sensibilités expérimentales obtenues avec ce dispositif. Les variations de fréquence sur la ligne périphérique et sur la ligne centrale étant de signe contraire, leur différence représente la somme des sensibilités, ce qui correspond à une variation relative de fréquence de :

$$F = \Delta F_{\text{axiale}} - \Delta F_{\text{périphérique}} = + 8,6\text{ KHz/bar}$$

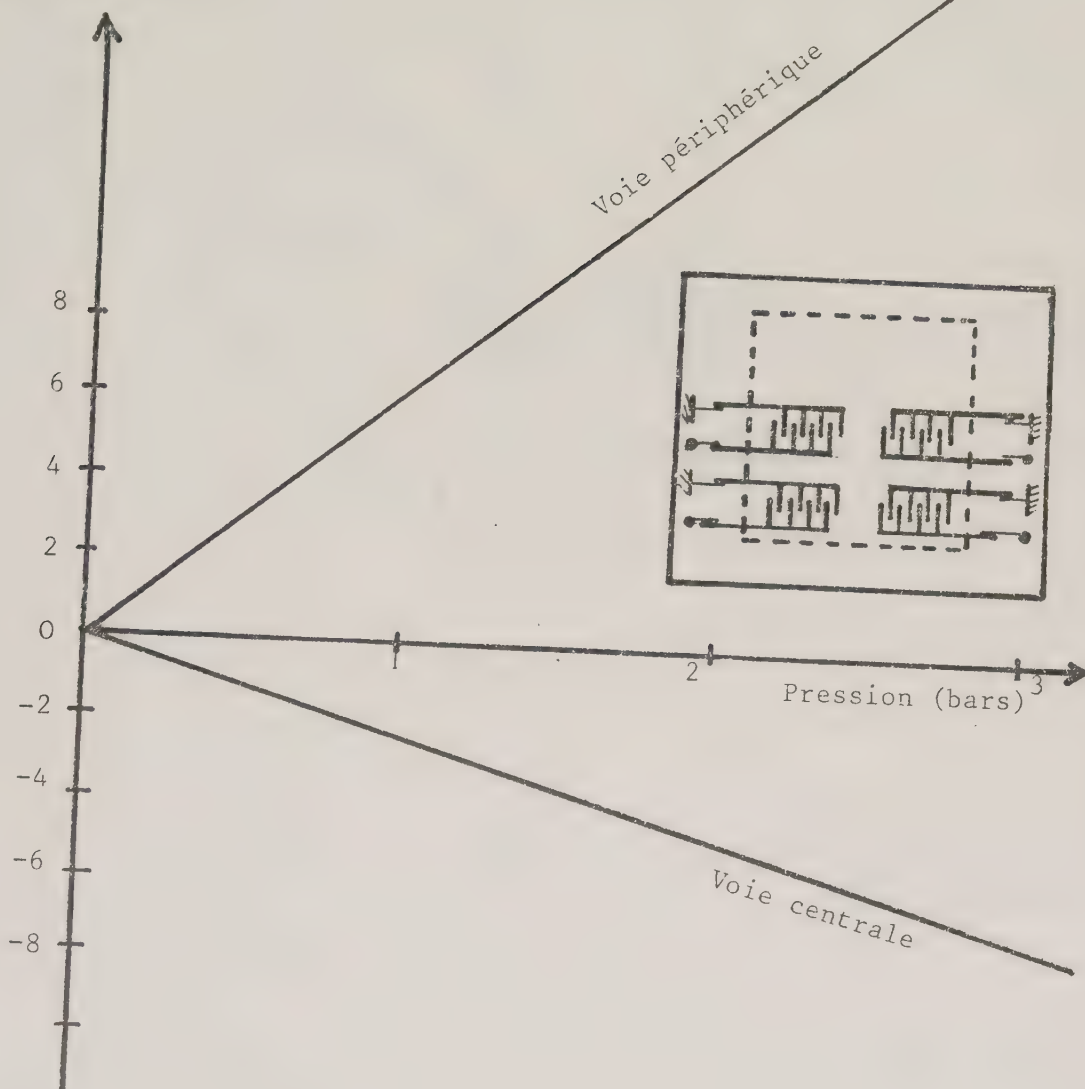
L'usinage d'une telle membrane étant assez délicat, les études se sont orientées plus particulièrement vers des membranes circulaires.

SENSIBILITE EXPERIMENTALE A LA PRESSION

D'UNE MEMBRANE RECTANGULAIRE

COUPE Y,X

Variation de
fréquence (KHz/bar)



Voie périphérique : +6,4 KHz/bar

Voie centrale : -2,3 KHz/bar

Fig. 30

B - CAS D'UNE MEMBRANE CIRCULAIRE

Comme dans le cas des membranes rectangulaires, les transducteurs sont disposés parallèlement à l'axe cristallographique (fig. 31)

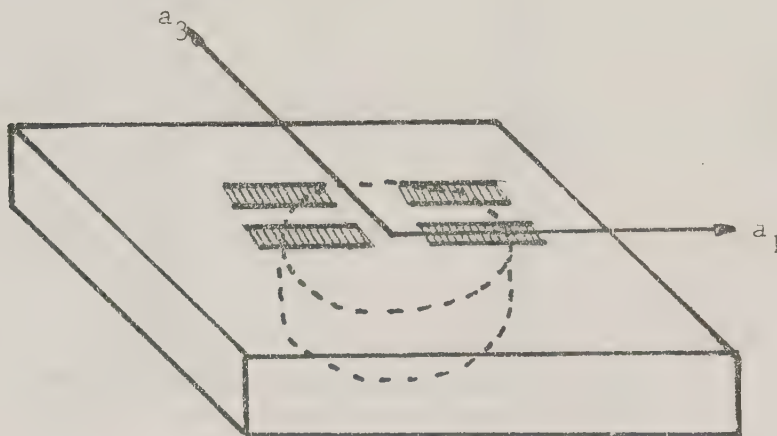


Fig. 31

Sur la figure 32 est représenté le dispositif d'encastrement de la plaque, dispositif analogue à ceux utilisés dans les autres essais de membranes à encastrement monolithique.

Les études théoriques de la première partie montrent que, lorsqu'une pression est appliquée sur une plaque circulaire encastree, la répartition de contrainte radiale présente un changement de signe à une distance D du centre de la plaque, voisine de $R/\sqrt{3}$, R étant le rayon de la membrane.

Par conséquent, la membrane déformée est divisée en deux zones concentriques où les effets radiaux de la pression sont de signe opposé. Ce changement de signe peut être mis à profit pour augmenter la sensibilité d'un capteur, en déposant une ligne à retard dans chacune des deux zones : les variations de fréquence de chaque oscillateur étant de signe contraire, leur différence va représenter la somme des sensibilités à la pression.

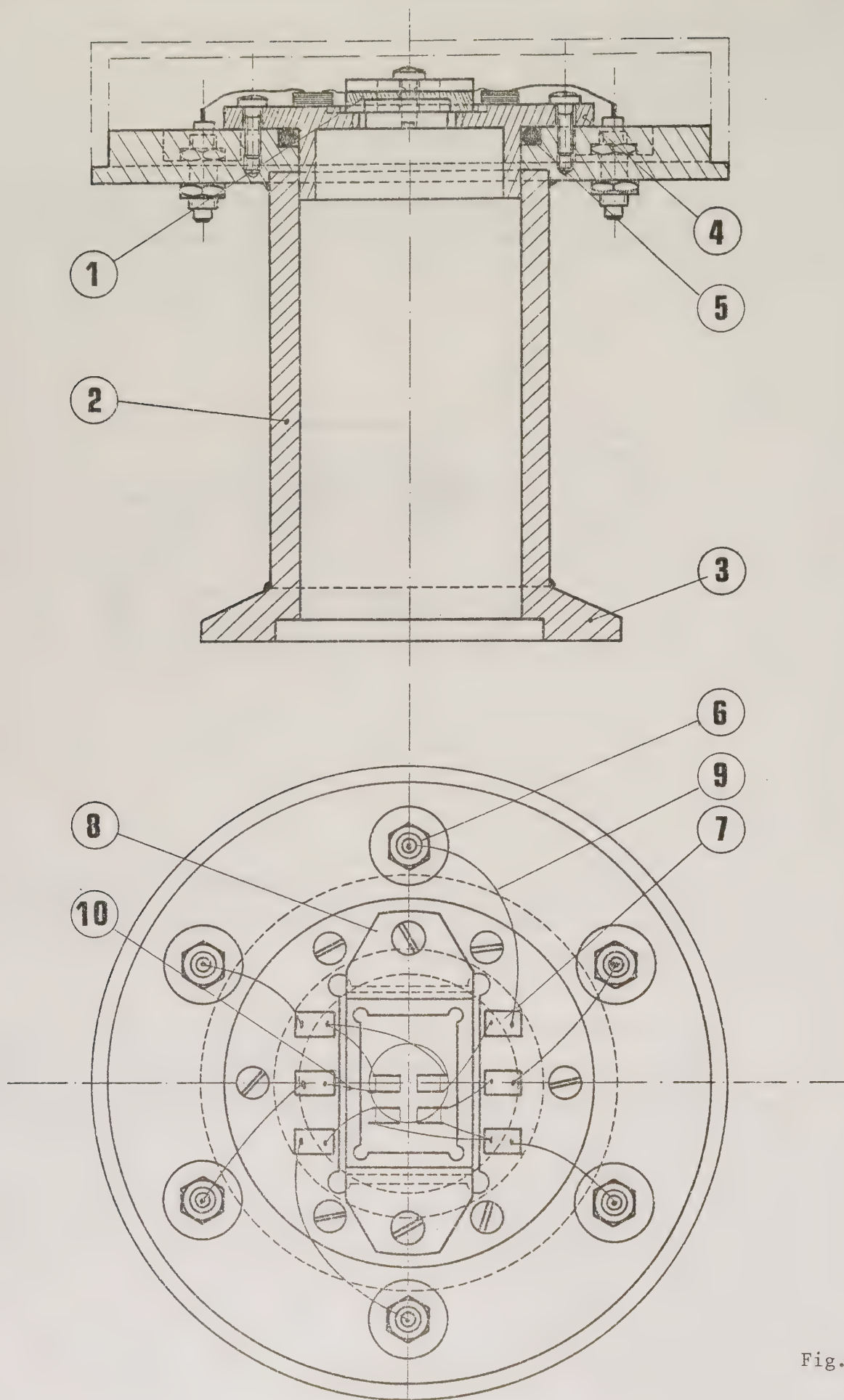


Fig. 32

- 1 Plaquette membrane avec transducteurs (quartz)
- 2 Corps
- 3 Bride pneurop pour raccordement sur enceinte à vide
- 4 Platine porte-plaquette
- 5 Joint torique assurant l'étanchéité entre 4 et 2
- 6 Passages subvis
- 7 Plaquette pour raccordement
- 8 Brides
- 9 Fil cuivre
- 10 Fil d'aluminium

L'étanchéité entre 1 et 4 est assurée par du mastic Silasten.

Un autre avantage de cette configuration est de permettre une très bonne compensation de la dérive en température (fig. 33). Pour une membrane en quartz de coupe Y de 250 μ d'épaisseur et de 10 mm de diamètre, la fréquence d'oscillation de 105 MHz, varie de 1 KHz entre -40°C et $+83^{\circ}\text{C}$, soit 0,03 ppm/ $^{\circ}\text{C}$.

Dans la zone centrale, la sensibilité est maximale lorsque la ligne est disposée suivant l'axe OX, les variations étant symétriques de part et d'autre de cet axe.

La position du deuxième transducteur dans la zone périphérique, dépend de divers paramètres et le problème est donc de définir sa position afin d'obtenir la plus grande sensibilité. Les résultats obtenus par le modèle théorique permettent de prévoir, dans chaque particulier de membrane, la disposition de la ligne à retard donnant les meilleures performances en pression.

L'étude porte dans un premier temps sur une membrane de quartz de coupe Y, de diamètre 10 mm, d'épaisseur 246 microns, la fréquence d'oscillation est de 105 MHz.

1°) INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES DE LA LIGNE

Les transducteurs de chaque ligne à retard ont pour largeur 1,5 mm, pour longueur 3 mm. La distance de parcours de l'onde est prise entre les deux milieux des transducteurs (14) et elle dépend donc de l'espacement entre les transducteurs.

Comme dans le cas isotrope, les valeurs radiales des déformations et des contraintes changent de signe aux environs de $R/\sqrt{3}$, c'est-à-dire 3 mm.

La figure 34 montre les variations ponctuelles obtenues le long d'axes parallèles à Oa_1 , ce qui correspond à diverses positions de la ligne à retard le long de l'axe Oa_3 .

Pour chaque position suivant Oa_3 , la variation moyenne de la fréquence est déterminée sur le parcours effectif de l'onde en supposant que les transducteurs sont très minces. A partir de la position $a_3 = 4$ mm, l'encas-

QUARTZ (Y, X)
 $e = 250$
 $\phi = 10 \text{ mm}$
 $f_1 \quad f_2 \quad 250 \text{ MHz}$

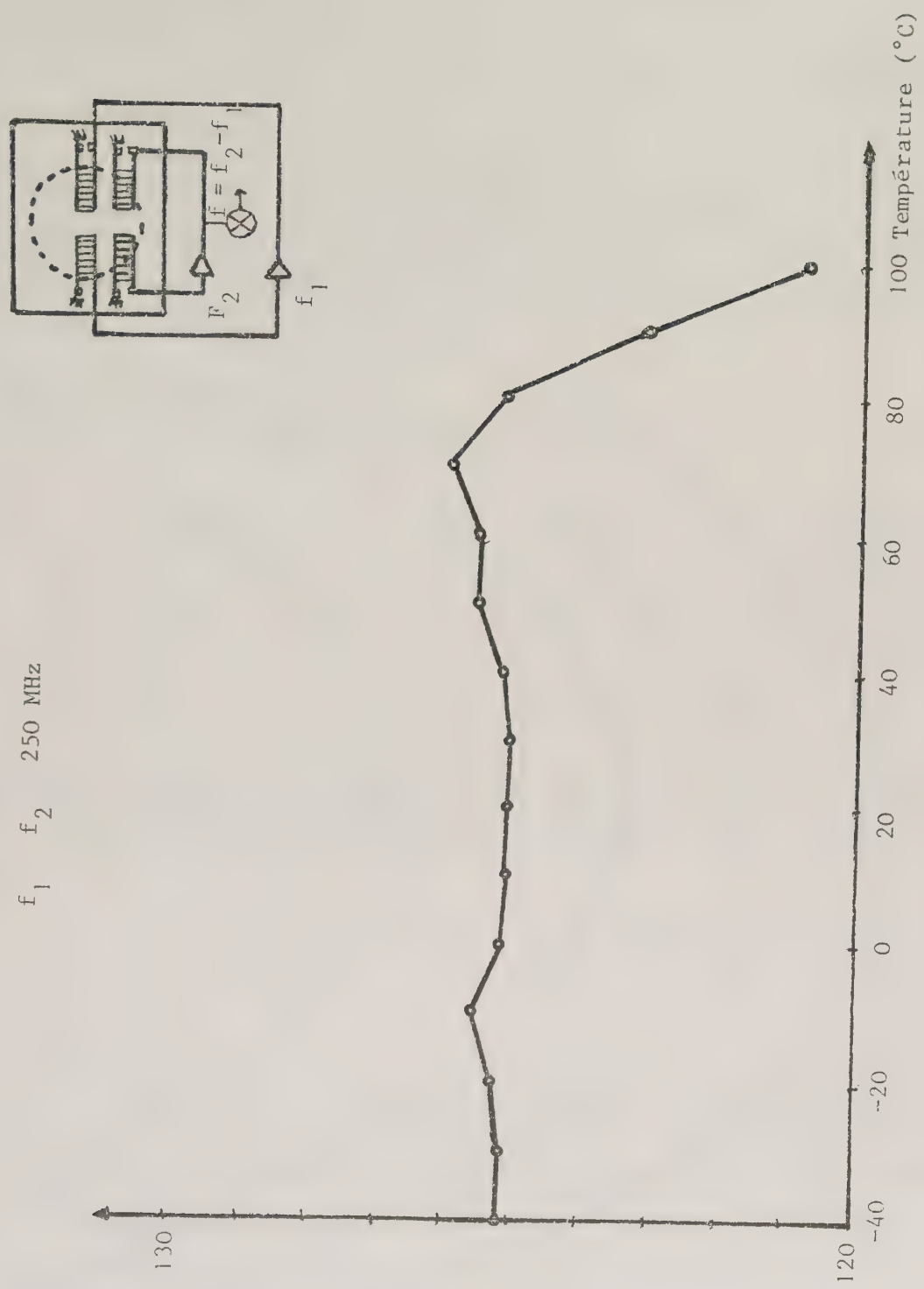


Fig. 33

QUARTZ (Y, X)

$e = 246 \mu$

$\phi = 10 \text{ mm}$

$f \approx 105 \text{ MHz}$

Variation de fréquence (KHz/Bar)

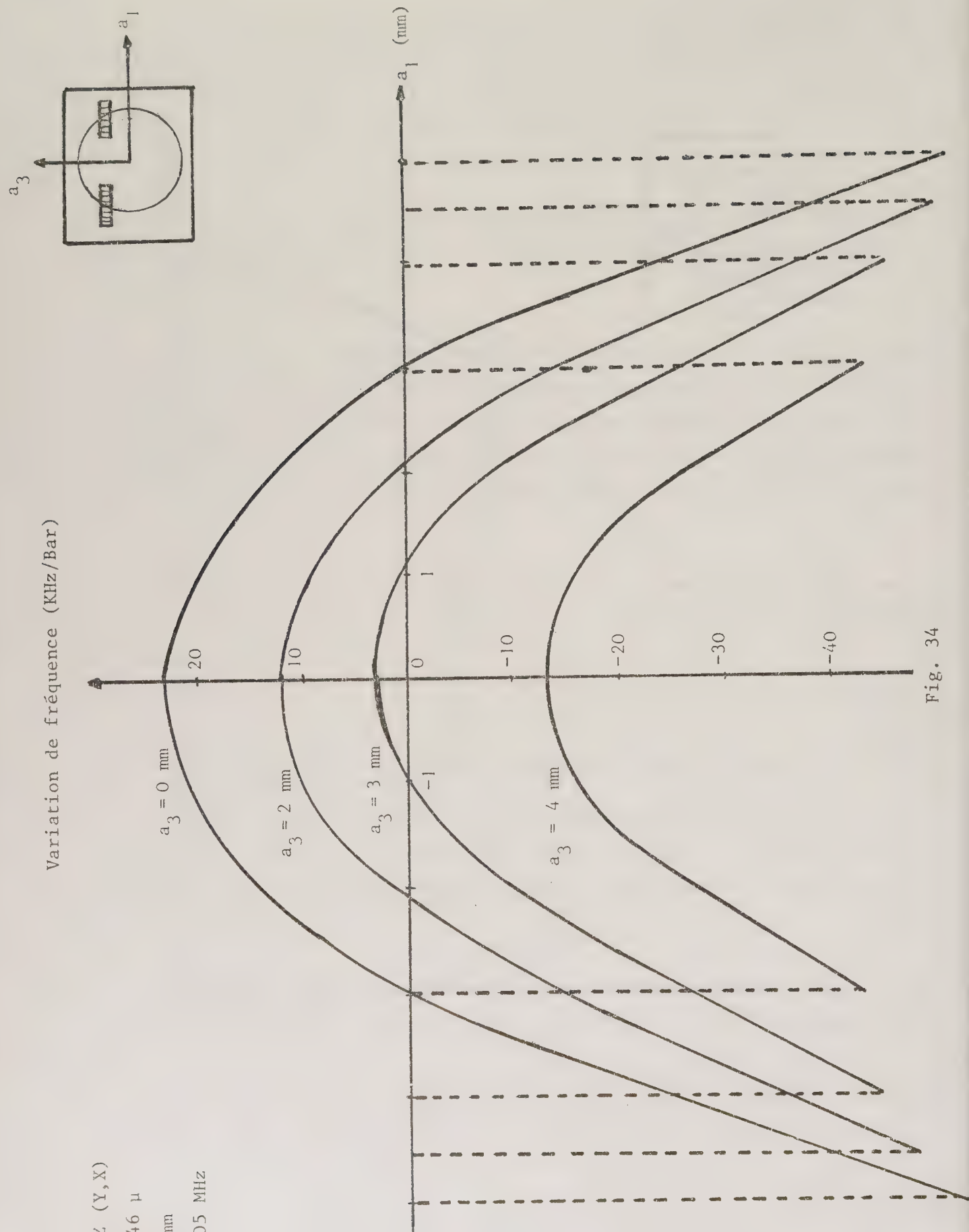


Fig. 34

trement de la membrane intervient puisque le parcours de l'onde est situé en partie sur le substrat où la sensibilité est très faible. Ceci provoque donc une diminution de la fréquence lorsque l'on se rapproche du bord de la membrane.

La figure 35 donne la courbe de sensibilité en fonction de la variable a_3 , pour différentes longueurs de parcours de l'onde. Les sensibilités extrêmes se situent d'une part sur l'axe central, d'autre part sur un axe situé à la distance a , avec :

$$a = \sqrt{R^2 - \delta^2}$$

δ étant la distance de parcours.

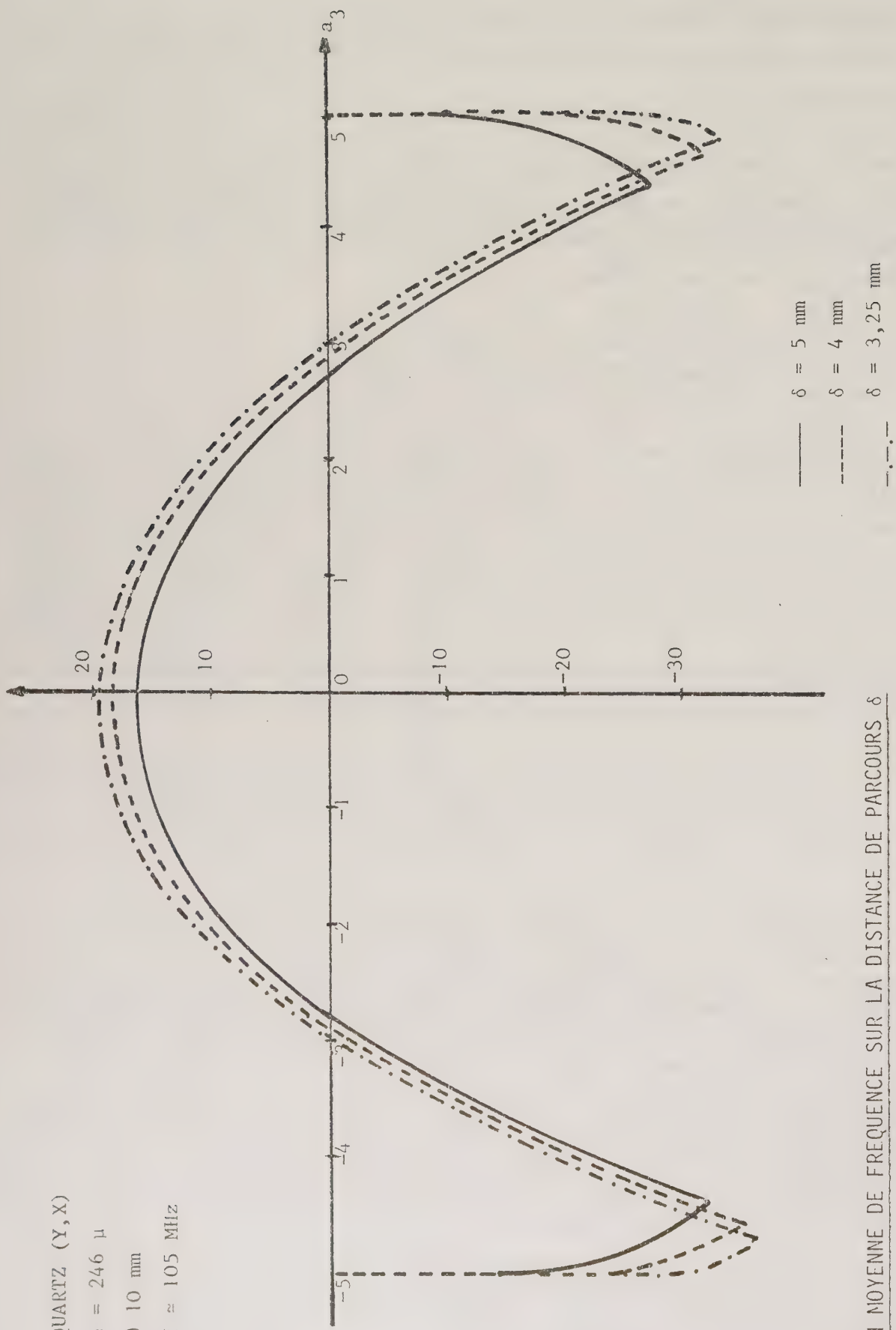
Il est aussi possible de ne plus considérer les transducteurs comme très minces, mais de tenir compte de leur largeur, autrement dit de déterminer d'après la figure 35 la variation moyenne de fréquence en cette largeur, pour chaque valeur de la variable a_3 . La courbe obtenue pour chaque valeur de δ , représente donc la variation de fréquence théorique lorsque la ligne est déplacée le long de l'axe Oa_3 (fig. 36). Les points expérimentaux indiqués ont été mesurés pour des transducteurs espacés de 2 mm, c'est-à-dire pour une distance de parcours de 5 mm.

Il apparaît que la sensibilité présente un maximum situé au-delà de $a_3 = 4$ mm. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Espace- ment	Dim. des transducteurs	Distance de parcours δ (mm)	Position du maximum (mm)	ΔF centrale	ΔF périphérique	ΔF relative
2 mm	1,5 x 3 mm	5	4,2	15,5	20,5	36
1 mm		4	4,35	17,5	20	37,5
250 μ		3,25	4,45	19,5	20,3	39,8

Le fait de rapprocher les transducteurs provoque donc une amélioration de plusieurs kilohertz. D'un point de vue pratique, l'espacement minimum entre ceux-ci est de 250 μ .

QUARTZ (Y, X)
e = 246 μ
 $\varnothing$ 10 mm
f $\approx$ 105 MHz



VARIATION MOYENNE DE FREQUENCE SUR LA DISTANCE DE PARCOURS δ
(transducteurs minces)

Fig. 35

Variation de fréquence (KHz/bar)

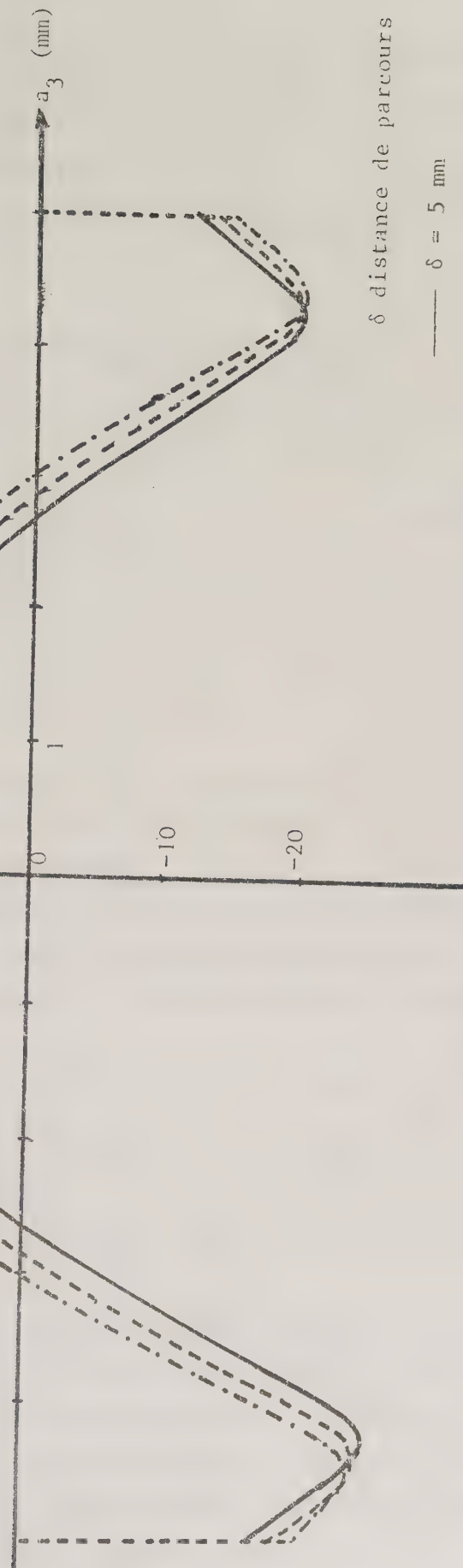
QUARTZ (Y,X)

$e = 246 \mu$

$\phi = 10 \text{ mm}$

$f = 105 \text{ MHz}$

largeur des transducteurs :
 $\ell = 1,5 \text{ mm}$



δ distance de parcours

— $\delta = 5 \text{ mm}$

- - - $\delta = 4 \text{ mm}$

- . - . $\delta = 3,25 \text{ mm}$

INFLUENCE DE LA DISTANCE DE PARCOURS δ

Fig. 36

Il est intéressant de faire également varier la largeur des transducteurs. Ainsi, pour des transducteurs ayant toujours la même longueur (3 mm), distants de 1 mm, mais dont la largeur est de 1 mm, la sensibilité est grandement améliorée notamment au niveau de la périphérie de la membrane (fig. 37) comme le montre le tableau ci-dessous.

Espace- ment	Dim. des transducteurs	Distance de parcours δ (mm)	Position du maximum (mm)	ΔF centrale	ΔF périphérique	ΔF relative
1 mm	1,5 $\times$ 3 mm	4	4,35	17,5	20	37,5
	1 $\times$ 3 mm	4	4,5	18,5	26,5	45

Par conséquent, les performances du capteur de pression dépendent de l'espacement entre les transducteurs qui doit être le plus faible possible en théorie (soit 250 μ environ en pratique) et de leur largeur qui doit également être la plus petite possible (en pratique, elle reste au minimum de 1 mm). Ce phénomène correspond au fait qu'il faut réduire le parcours de l'onde sur le substrat épais, où la sensibilité est faible.

Les sensibilités expérimentales sont données pour une ligne centrale et une ligne située à $a_3 = 3,94$ mm. Les transducteurs ont pour largeur 1,5 mm et sont distants de 2 mm. Nous donnons les sensibilités théoriques associées à cette position de la ligne, puis celles correspondant à la position optimale de la ligne périphérique, soit : $a_3 = 4,2$ mm.

Ensuite, nous considérons le cas de transducteurs de largeur 1 mm, distants de 1 mm. La position optimale est alors de $a_3 = 4,3$ mm. Les variations relatives théoriques correspondantes sont également inscrites dans le tableau ci-après. Elles mettent en valeur l'augmentation de la sensibilité avec ces nouvelles caractéristiques.

Variation de fréquence (KHz/bar)

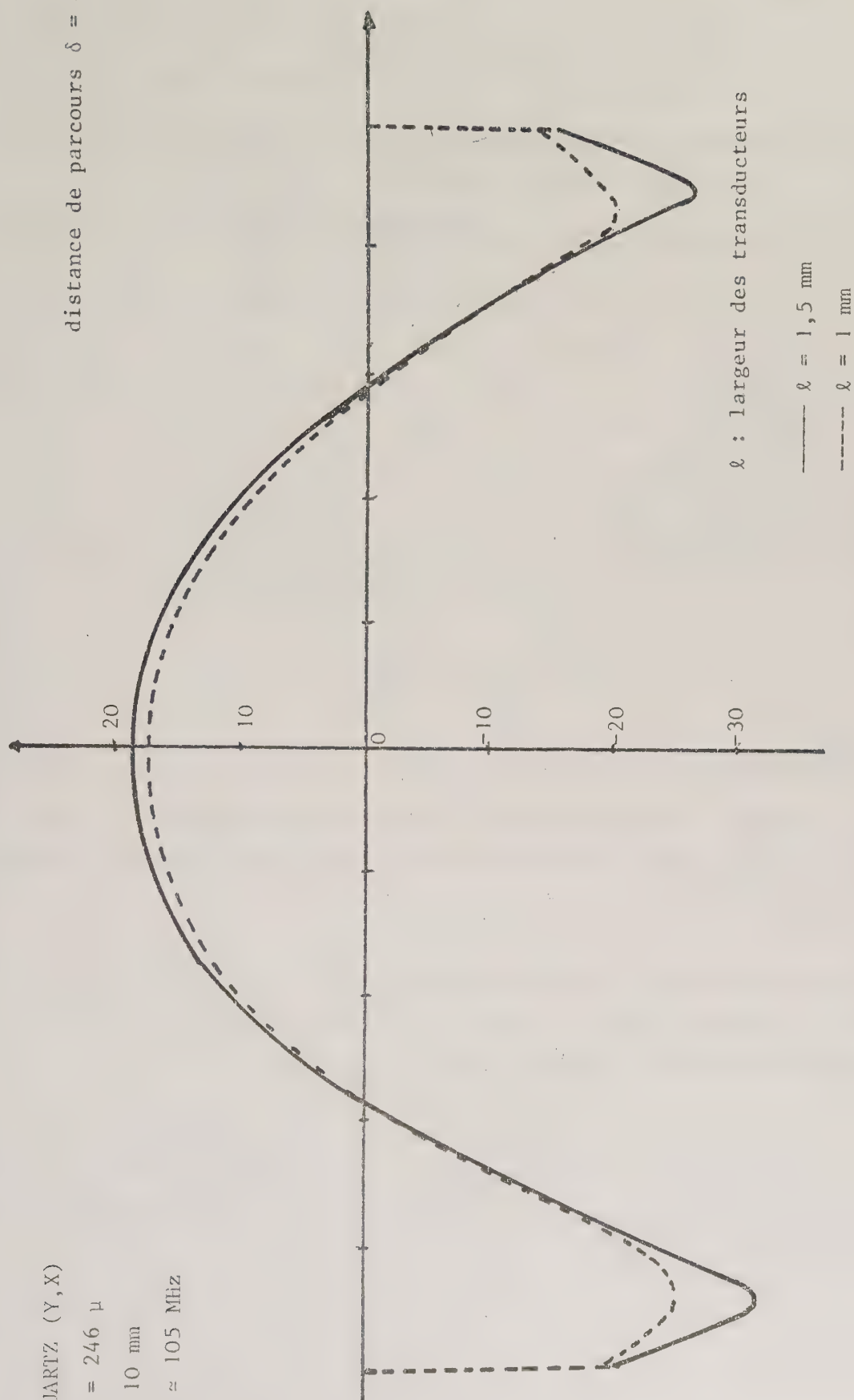
QUARTZ (Y,X)

$e = 246 \mu$

$\phi 10 \text{ mm}$

$f \approx 105 \text{ MHz}$

distance de parcours $\delta = 4 \text{ mm}$



λ : largeur des transducteurs

— $\lambda = 1,5 \text{ mm}$

- - - $\lambda = 1 \text{ mm}$

INFLUENCE DE LA LARGEUR DES TRANSDUCTEURS

Fig. 37

			transducteurs 3 × 1,5 mm distants de 2 mm			transducteurs 3 × 1 mm distants de 1 mm
f (MHz)	e (μ)	∅ (mm)	ΔF relative expérimentale (KHz/bar)	ΔF relative théorique (KHz/bar)	ΔF relative théorique optimale (KHz/bar)	ΔF relative théorique (KHz/bar)
70	200	10	35,7	34,8	37	38
105	207	10	65,5	49	51,5	53
105	150	10	36,4	33,5	35,3	36,3
251	250	10	100	80	84,4	86,7

2°) INFLUENCE DE LA COUPE

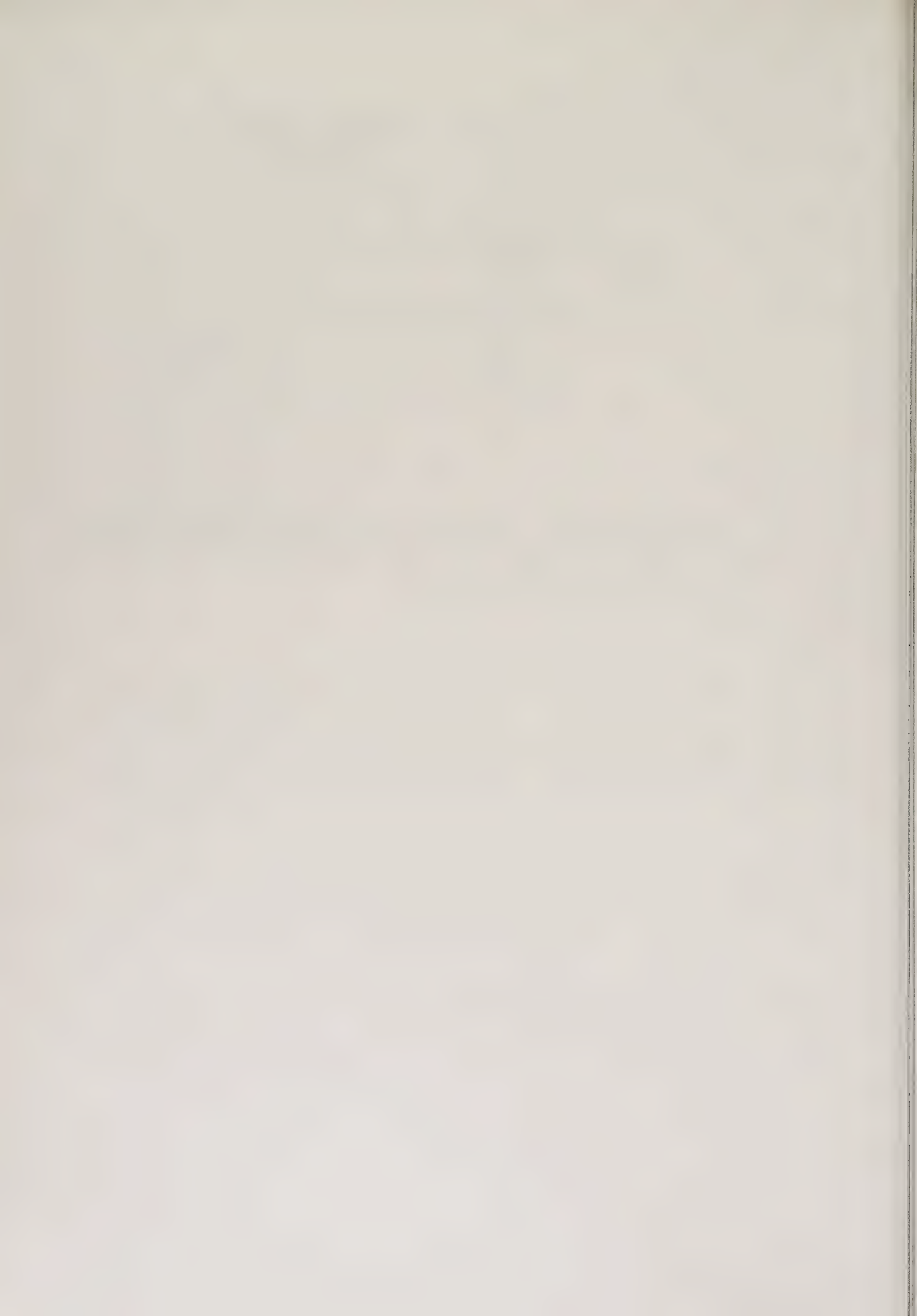
La théorie a été appliquée au cas de coupes autres que la coupe Y et notamment de coupes retenues pour leur faible coefficient de température [3].

Les sensibilités théoriques obtenues pour une ligne située sur l'axe central et une autre ligne située à la distance optimale de l'axe Oa_1 sont regroupées dans le tableau ci-après.

Les valeurs données correspondent au cas d'une membrane circulaire de 246 μ d'épaisseur, 10 mm de diamètre. Les transducteurs ont pour largeur 1 mm, pour longueur 3 mm et sont espacés de 1 mm. La fréquence d'oscillation est de 105 MHz.

Coupe	Variation relative de fréquence (KHz/bar)
ST	3,5
$\Psi = 0^\circ$ $\Theta = 47^\circ$ $\Phi = 10^\circ$	4,5
$\Psi = 0$ $\Theta = 62,5^\circ$ $\Phi = 20^\circ$	9

La fabrication des coupes à double rotation demandant un certain délai, l'étude expérimentale des lignes correspondant à ces coupes n'a pas encore été réalisée actuellement.



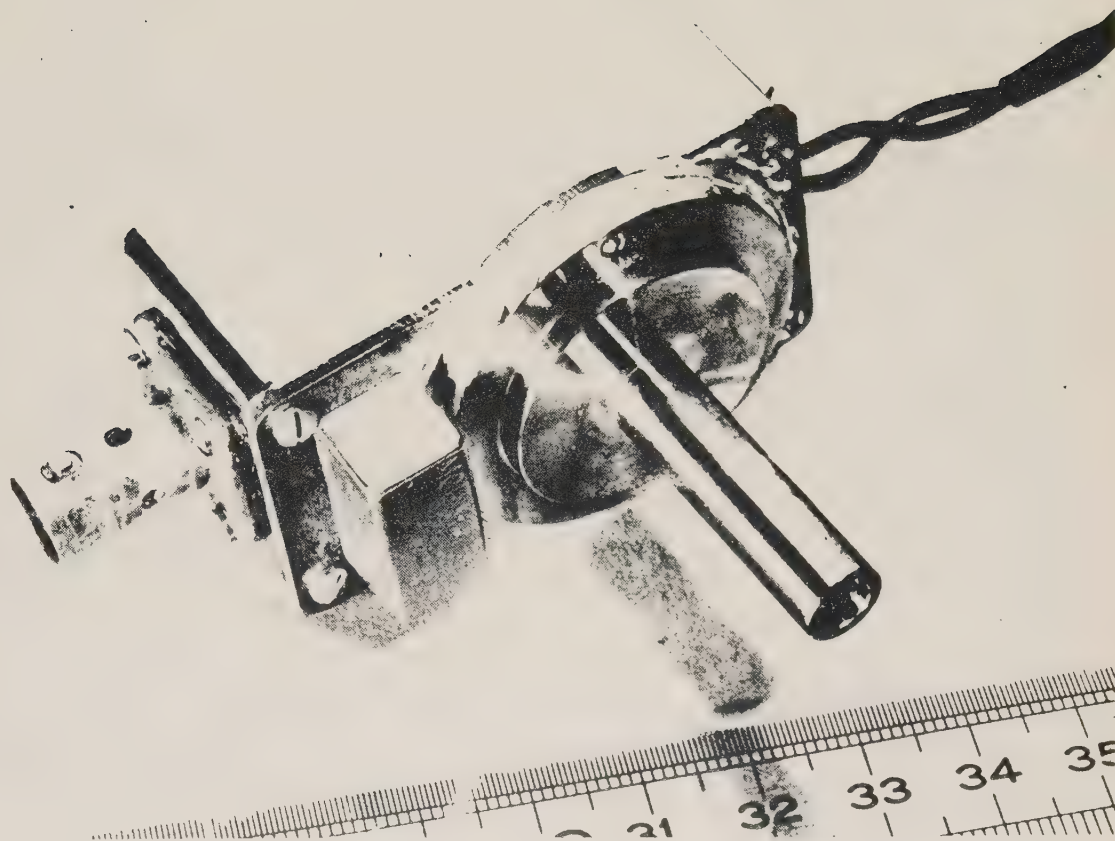


Photo 4 .

Réalisation industrielle du capteur de pression

C O N C L U S I O N

Au cours de cette étude, nous nous sommes efforcés de réaliser un modèle théorique rendant compte de façon précise des effets de la pression sur un dispositif à ondes de surface, dans le but de construire un type nouveau de capteur à quartz.

D'un point de vue fondamental, une description exhaustive des mécanismes de couplage non linéaire entre une onde élastique et une perturbation extérieure a été réalisée. Elle est applicable à toutes les perturbations extérieures qui agissent sur le dispositif à la condition que les efforts et les déformations qui en résultent puissent être considérés comme statiques.

Cette étude très générale conduit à des relations locales qui permettent d'obtenir la sensibilité des dispositifs étudiés aux forces, aux accélérations ou aux pressions au moyen d'une méthode de perturbation. Cette méthode, qui est applicable aussi bien aux ondes volume qu'aux ondes de surface, prend en compte pour ces dernières la profondeur de pénétration de l'onde dans le substrat cristallin. Dans le cas des membranes, nous avons encore perfectionné ce modèle en tenant compte de son épaisseur exacte qui peut être dans certains cas de l'ordre de la profondeur de pénétration.

Les termes de couplage entre la perturbation et le cristal sont fonction des propriétés élastiques du milieu de propagation ainsi que des efforts et déformations induits par la précontrainte. Dans le cas des effets de pression, les paramètres de la prédéformation se répartissent de façon inhomogène dans l'ensemble du volume du substrat. En conséquence, une méthode d'approximation a été élaborée et appliquée pour obtenir leurs valeurs pour les différents dispositifs étudiés.

Le modèle théorique s'est traduit par un programme général écrit en langage Fortran et divisé en trois éléments :

- a) calcul des prédéformations et précontraintes résultant de l'application d'une pression.
- b) détermination des constantes élastiques modifiées caractérisant le couplage non linéaire.
- c) calcul des variations de fréquence de l'onde.

Il a aussi permis de prévoir dans chaque cas la configuration géométrique la plus appropriée à une mesure de la pression, en ajoutant différents paramètres comme la position par rapport à l'axe de propagation, l'écartement et la largeur des transducteurs.

Après avoir analysé rapidement le cas d'une plaque massive, l'étude a porté sur la détermination de la sensibilité d'un capteur de pression utilisant une membrane circulaire. Les études expérimentales ont permis de mettre en évidence, par la concordance des mesures et des résultats théoriques, la validité de nos modèles théoriques.

En complément, a été réalisée l'étude de l'influence de la température sur une membrane, étude qui permet d'expliquer les caractéristiques anormales effectivement observées et de déterminer des coupes de quartz à simple rotation diminuant cet effet.

Nous avons aussi montré que l'utilisation d'un capteur différentiel mettant en oeuvre deux lignes à retard sur une même membrane conduit à un accroissement de la sensibilité si la position des transducteurs est judicieuse, tout en s'affranchissant des effets thermiques parasites.

La coupe cristallographique du quartz a une influence non négligeable sur la sensibilité du dispositif et nous présentons quelques résultats en guise d'illustration. Une exploitation plus complète du programme permettra, s'il en est besoin, de déterminer les coupes les plus sensibles à la pression.

Technologiquement, deux modèles de capteurs de pression ont été étudiés pour des applications différentes : d'une part un capteur à prix de revient élevé constitué d'une membrane à encastrement monolithique de très

bonne tenue en température et d'autre part, un capteur meilleur marché à membrane collée destinée à une large gamme d'utilisations. Ce dernier fait aujourd'hui encore l'objet d'études complémentaires en ce qui concerne le mode de fixation.

ANNEXE I

VALEURS NUMERIQUES DES PARAMETRES DU QUARTZ (12)

1°) Masse volumique

$$\rho = 2,65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

2°) Coefficients de dilatation thermique

du 1er ordre :

$$\alpha_{11}^{(1)} = 13,71 \times 10^{-6}/(^{\circ}\text{C})$$

$$\alpha_{33}^{(1)} = 7,48 \times 10^{-6}/(^{\circ}\text{C})$$

du 2e ordre :

$$\alpha_{11}^{(2)} = 6,5 \times 10^{-9}/(^{\circ}\text{C})^2$$

$$\alpha_{33}^{(2)} = 2,9 \times 10^{-9}/(^{\circ}\text{C})^2$$

du 3e ordre :

$$\alpha_{11}^{(3)} = -1,9 \times 10^{-12}/(^{\circ}\text{C})^3$$

$$\alpha_{33}^{(3)} = -1,5 \times 10^{-12}/(^{\circ}\text{C})^3$$

3°) Coefficients élastiques de souplesse du 2e ordre :

$$s_{11} = 12,777 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$s_{12} = -1,807 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$s_{13} = -1,235 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$s_{14} = 4,521 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$s_{22} = s_{11}$$

$$s_{23} = s_{13}$$

$$s_{33} = 9,735 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$s_{44} = 12,985 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$s_{55} = s_{44}$$

$$s_{56} = 2 s_{14}$$

$$s_{66} = 29,167 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

4°) Coefficients élastiques de raideur du 2e ordre

$$c_{11} = 8,674 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$c_{12} = 0,699 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$c_{13} = 1,191 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$c_{14} = -1,791 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$c_{22} = c_{11}$$

$$c_{23} = c_{13}$$

$$c_{24} = -c_{14}$$

$$c_{33} = 10,72 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$c_{44} = 5,794 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$c_{55} = c_{44}$$

$$c_{56} = c_{14}$$

$$c_{66} = 3,988 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

5°) Coefficients piézoélectriques

$$e_{11} = 0,171 \text{ C/m}^2$$

$$e_{14} = -0,0406 \text{ C/m}^2$$

$$e_{12} = -e_{11}$$

$$e_{23} = -e_{14}$$

$$e_{26} = -e_{11}$$

6°) Permittivité

$$\epsilon_{11} = 39,97 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\epsilon_{33} = 41,03 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{11}$$

7°) Coefficients élastiques de raideur du 3e ordre d'après Thurston

$$c_{111} = -2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{112} = -3,45 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{113} = 0,12 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{114} = -1,63 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{123} = -2,94 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{124} = -0,15 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{133} = -3,12 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{134} = 0,2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{144} = -1,34 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{155} = -2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{222} = -3,32 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{333} = -9,15 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{544} = -1,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{444} = -2,76 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$c_{223} = c_{113}$$

$$c_{233} = c_{133}$$

$$c_{244} = c_{155}$$

$$c_{255} = c_{144}$$

$$c_{355} = c_{344}$$

$$c_{224} = -c_{114} - c_{124}$$

$$c_{455} = -3c_{444}$$

$$c_{466} = 2c_{124}$$

$$c_{156} = 2c_{114} + 3c_{124}$$

$$c_{256} = 2c_{114} - c_{124}$$

$$c_{356} = 2c_{134}$$

$$c_{234} = -c_{134}$$

$$c_{456} = 2c_{155} - c_{144}$$

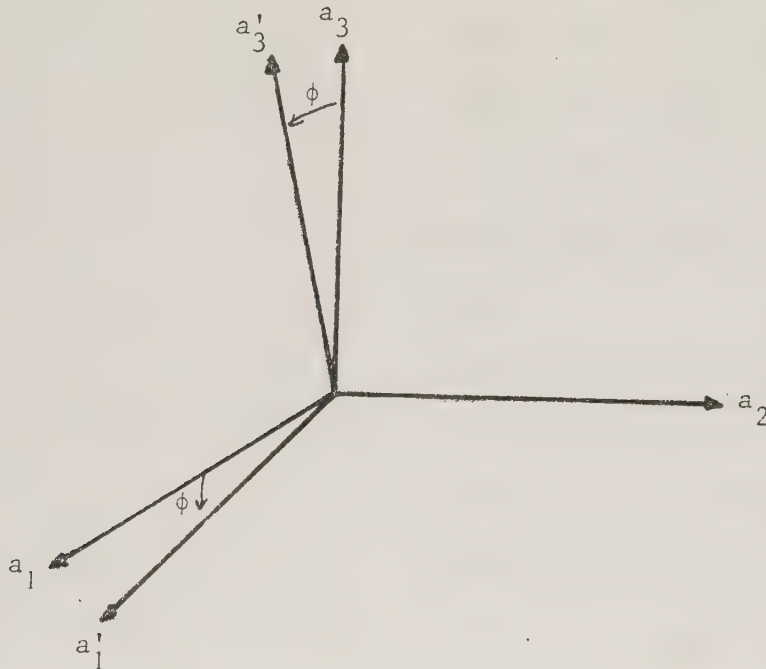
$$c_{366} = 2c_{113} - c_{123}$$

$$c_{266} = 6c_{111} - 3c_{222} - c_{112}$$

$$c_{122} = 3c_{111} + c_{112} - 3c_{222}$$

$$c_{166} = -6c_{111} - c_{112} + 9c_{222}$$

8°) Expression des coefficients élastiques C'_{ij} obtenus par une rotation d'angle ϕ autour de Oa_2 (13)



On note :

$$m = \sin \phi$$

$$n = \cos \phi$$

La matrice de rotation est :

$$A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} n & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & n \end{pmatrix}$$

Les coefficients C'_{ij} sont alors donnés par la relation :

$$C'_{ijkl} = A_{ip} A_{jq} A_{kr} A_{ls} C_{pqrs},$$

les coefficients C_{pqrs} étant les coefficients élastiques de raideur du second ordre de la coupe considérée.

Les expressions développées des c'_{ij} en fonction de l'angle ϕ sont données ci-dessous :

$$c'_{11} = n^4 c_{11} + m^4 c_{33} - 4mn^3 c_{15} + 2n^2 m^2 c_{13} + 4m^2 n^2 c_{55} + 4m^3 n c_{35}$$

$$c'_{12} = n^2 c_{12} + m^2 c_{23} - 2mnc_{25}$$

$$c'_{13} = m^2 n^2 (c_{11} + c_{33}) + c_{13} (m^4 + n^4) + 2mnc_{15} (n^2 - m^2) - 4m^2 n^2 c_{55} + 2mnc_{35} (m^2 - n^2)$$

$$c'_{14} = n^3 c_{14} + m^3 c_{36} - 2mn^2 c_{54} - 2m^2 n c_{56} + mn^2 c_{16} + m^2 n c_{34}$$

$$c'_{15} = mn(n^2 c_{11} - m^2 c_{33}) + n^4 c_{15} - m^4 c_{35} - 3m^2 n^2 c_{15} + mnc_{13} (m^2 - n^2) + 3m^2 n^2 c_{35} + 2mnc_{55} (m^2 - n^2)$$

$$c'_{16} = n^3 c_{16} - m^3 c_{34} - mn^2 c_{14} + m^2 n c_{36} - 2mn^2 c_{56} + 2m^2 n c_{54}$$

$$c'_{22} = c_{22}$$

$$c'_{23} = m^2 c_{12} + n^2 c_{32} + 2mnc_{25}$$

$$c'_{24} = mc_{26} + nc_{24}$$

$$c'_{25} = (n^2 - m^2) c_{25} + mn(c_{12} - c_{32})$$

$$c'_{26} = nc_{26} - mc_{24}$$

$$c'_{36} = n^3 c_{36} - m^3 c_{14} + m^2 n c_{16} - n^2 m c_{34} + 2mn^2 c_{56} - 2n^2 m c_{54}$$

$$c'_{46} = (n^2 - m^2) c_{46} + mn(c_{66} - c_{44})$$

$$c'_{56} = m^3 c_{54} + n^3 c_{56} + m^2 n c_{34} - mn^2 c_{36} - m^2 n c_{56} - n^2 m c_{54}$$

$$c'_{66} = n^2 c_{66} + m^2 c_{44} - 2mnc_{46}$$

ANNEXE II

DETERMINATION DES DEPLACEMENTS DANS UN PLAN QUELCONQUE

DE LA MEMBRANE NORMALE AUX FACES LIBRES

A - CAS DU PLAN (a_1, a_2)

1°) Premier système d'équations différentielles

Ce système est obtenu en remplaçant les efforts moyens d'ordre n par leur expression (III-8) en fonction des déplacements d'ordre n dans les relations (III-9). Il s'écrit à l'aide des 8 équations suivantes (on utilise la notation $X_{i,j} = \partial X_i / \partial a_j$) :

$$c_{62} (u_2^{(1)} + h^2 u_2^{(3)})_{,1} + c_{16} (u_{1,1}^{(0)} + \frac{h^2}{3} u_{1,1}^{(2)} + \frac{h^4}{5} u_{1,1}^{(4)})_{,1} \\ + c_{66} (u_1^{(1)} + u_{2,1}^{(0)} + \frac{h^2}{3} (u_{2,1}^{(2)} + 3u_2^{(3)}) + \frac{h^4}{5} u_{2,1}^{(4)})_{,1} + \rho X_2 + \frac{q}{2h} = 0$$

$$c_{12} (u_2^{(1)} + h^2 u_2^{(3)})_{,1} + c_{11} (u_{1,1}^{(0)} + \frac{h^2}{3} u_{1,1}^{(2)} + \frac{h^4}{5} u_{1,1}^{(4)})_{,1} \\ + c_{16} (u_1^{(1)} + u_{2,1}^{(0)} + \frac{h^2}{3} (u_{2,1}^{(2)} + 3u_2^{(3)}) + \frac{h^4}{5} u_{2,1}^{(4)})_{,1} = 0$$

$$c_{62} (\frac{2h^2}{3} u_2^{(2)} + \frac{4h^4}{5} u_2^{(4)})_{,1} + c_{61} (\frac{h^2}{3} u_{1,1}^{(1)} + \frac{h^4}{5} u_{1,1}^{(3)})_{,1} \\ + c_{66} \left[\frac{h^4}{5} (u_{2,1}^{(3)} + 4u_1^{(4)}) + \frac{h^2}{3} (2u_1^{(2)} + u_{2,1}^{(1)}) \right]_{,1} - c_{22} (u_2^{(1)} + h u_2^{(3)}) \\ - c_{12} (u_{1,1}^{(0)} + \frac{h^2}{3} u_{1,1}^{(2)} + \frac{h^4}{5} u_{1,1}^{(4)}) - c_{26} (u_1^{(1)} + u_{2,1}^{(0)} + \frac{h^2}{3} (u_{2,1}^{(2)} + 3u_1^{(3)}) \\ + \frac{h^4}{5} u_2^{(4)}) + \frac{q_1 + q_2}{2} = 0$$

$$c_{12} (\frac{2h^2}{3} u_2^{(2)} + \frac{4h^4}{5} u_2^{(4)})_{,1} + c_{11} (\frac{h^2}{3} u_{1,1}^{(1)} + \frac{h^4}{5} u_{1,1}^{(3)})_{,1} + c_{16} \left[\frac{h^4}{5} (u_{2,1}^{(3)} + 4u_1^{(4)}) \right. \\ \left. + \frac{h^2}{3} (2u_1^{(2)} + u_{2,1}^{(1)}) \right]_{,1} - c_{62} (u_2^{(1)} + h^2 u_2^{(3)}) - c_{61} (u_{1,1}^{(0)} + \frac{h^2}{3} u_{1,1}^{(2)} \\ + \frac{h^4}{5} u_{1,1}^{(4)}) - c_{66} \left[u_1^{(1)} + u_{2,1}^{(0)} + \frac{h^2}{3} (u_{2,1}^{(2)} + 3u_1^{(3)}) + \frac{h^4}{5} u_2^{(4)} \right] = 0$$

$$c_{62} \left(\frac{1}{3} u_2^{(1)} + \frac{3h^2}{5} u_2^{(3)} \right)_{,1} + c_{61} \left(\frac{1}{3} u_{1,1}^{(0)} + \frac{h^2}{5} u_{1,1}^{(2)} + \frac{h^4}{7} u_{1,1}^{(4)} \right)_{,1} + c_{66} \left[\frac{1}{3} (u_{2,1}^{(0)} + u_2^{(1)}) + \frac{h^2}{5} (u_{2,1}^{(2)} + 3u_1^{(3)}) + \frac{h^4}{7} u_{2,1}^{(4)} \right]_{,1} - 4c_{22} \left(\frac{1}{3} u_2^{(2)} + \frac{2h^2}{5} u_2^{(4)} \right) - 2c_{12} \left(\frac{1}{3} u_{1,1}^{(1)} + \frac{h^2}{5} u_{1,1}^{(3)} \right) - 2c_{26} \left[\frac{1}{3} (2u_1^{(2)} + u_{2,1}^{(1)}) + \frac{h^2}{5} (u_{2,1}^{(3)} + 4u_1^{(4)}) \right] + \rho \frac{x_2}{3} + \frac{q}{2h} = 0$$

$$c_{12} \left(\frac{1}{3} u_2^{(1)} + \frac{3h^2}{5} u_2^{(3)} \right)_{,1} + c_{11} \left(\frac{1}{3} u_{1,1}^{(0)} + \frac{h^2}{5} u_{1,1}^{(2)} + \frac{h^4}{7} u_{1,1}^{(4)} \right)_{,1} + c_{16} \left[\frac{1}{3} (u_{2,1}^{(0)} + u_2^{(1)}) + \frac{h^2}{5} (u_{2,1}^{(2)} + 3u_1^{(3)}) + \frac{h^4}{7} u_{2,1}^{(4)} \right]_{,1} - 4c_{62} \left(\frac{1}{3} u_2^{(2)} + \frac{2h^2}{5} u_2^{(4)} \right) - 2c_{16} \left(\frac{1}{3} u_{1,1}^{(1)} + \frac{h^2}{5} u_{1,1}^{(3)} \right) - 2c_{66} \left[\frac{1}{3} (2u_1^{(2)} + u_{2,1}^{(1)}) + \frac{h^2}{5} (u_{2,1}^{(3)} + 4u_1^{(4)}) \right] = 0$$

$$c_{62} \left(\frac{2h^2}{5} u_2^{(2)} + \frac{4h^4}{7} u_2^{(4)} \right)_{,1} + c_{16} \left(\frac{h^2}{5} u_{1,1}^{(1)} + \frac{h^4}{7} u_{1,1}^{(3)} \right)_{,1} + c_{66} \left(\frac{h^2}{5} u_{2,1}^{(1)} + \frac{2h^2}{5} u_1^{(2)} + \frac{h^4}{7} u_{2,1}^{(3)} + \frac{4h^4}{7} u_1^{(4)} \right)_{,1} - 3c_{22} \left(\frac{1}{3} u_2^{(1)} + \frac{3h^2}{5} u_2^{(3)} \right) - 3c_{21} \left(\frac{1}{3} u_{1,1}^{(0)} + \frac{h^2}{5} u_{1,1}^{(2)} + \frac{h^4}{7} u_{1,1}^{(4)} \right) - 3c_{26} \left[\frac{1}{3} (u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)}) + \frac{h^2}{5} (u_{2,1}^{(2)} + 3u_1^{(3)}) + \frac{h^4}{7} u_{2,1}^{(4)} \right] + \frac{q_1 + q_2}{2h} = 0$$

$$c_{12} \left(\frac{2h^2}{5} u_2^{(2)} + \frac{4h^4}{7} u_2^{(4)} \right)_{,1} + c_{11} \left(\frac{h^2}{5} u_{1,1}^{(1)} + \frac{h^4}{7} u_{1,1}^{(3)} \right)_{,1} + c_{16} \left(\frac{h^2}{5} u_{2,1}^{(1)} + \frac{2h^2}{5} u_1^{(2)} + \frac{h^4}{7} u_{2,1}^{(3)} + \frac{4h^4}{7} u_1^{(4)} \right)_{,1} - 3c_{62} \left(\frac{1}{3} u_2^{(1)} + \frac{3h^2}{5} u_2^{(3)} \right) - 3c_{61} \left(\frac{1}{3} u_{1,1}^{(0)} + \frac{h^2}{5} u_{1,1}^{(2)} + \frac{h^4}{7} u_{1,1}^{(4)} \right) - 3c_{66} \left[\frac{1}{3} (u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)}) + \frac{h^2}{5} (u_{2,1}^{(2)} + 3u_1^{(3)}) + \frac{h^4}{7} u_{2,1}^{(4)} \right] = 0$$

2°) Deuxième système d'équations

Les conditions aux limites se traduisent par quatre équations différentielles :

$$2c_{22} (u_2^{(2)} + 2h^2 u_2^{(1)}) + c_{21} (u_{2,1}^{(1)} + h^2 u_{1,1}^{(3)}) + c_{26} (u_{2,1}^{(1)} + 2u_1 + h^2 u_{2,1}^{(3)} + 4h^2 u_1^{(4)}) = \frac{q_1 - q_2}{2h} = \frac{q}{2h}$$

$$2c_{62}(u_2^{(2)} + 2h^2u_2^{(4)}) + c_{61}(u_{1,1}^{(1)} + h^2u_{1,1}^{(2)}) + c_{66}(u_{2,1}^{(1)} + 2u_1 + h^2u_{2,1}^{(3)} + 4h^2u_1^{(4)}) = 0$$

$$c_{21}(h^4u_{1,1}^{(4)} + h^2u_{1,1}^{(2)} + u_{1,1}^{(0)}) + c_{22}(u_2^{(1)} + 3h^2u_2^{(3)}) + c_{26}(h^4u_{2,1}^{(1)} + h^2(u_{2,1}^{(2)} + 3u_1^{(3)}) + u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)}) = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

$$c_{61}(h^4u_{1,1}^{(4)} + h^2u_{1,1}^{(2)} + u_{1,1}^{(0)}) + c_{26}(u_2^{(1)} + 3h^2u_2^{(3)}) + c_{66}(h^4u_{2,1}^{(4)} + h^2(u_{2,1}^{(2)} + 3u_1^{(3)}) + u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)}) = 0$$

3°) Le principe de résolution

Les déplacements d'ordre n $u_i^{(n)}$ sont remplacés par leurs expressions (III-7). Après identification des termes en a_3^m , le système global devient un système de 32 équations aux 30 inconnues A_i, B_i, C_i, D_i, E_i . En fait, seules 24 équations sont indépendantes. La résolution du système permet donc de déterminer 24 inconnues et d'exprimer les déplacements en fonction des 6 inconnues restantes : A_1, B_1, C_1, D_1, D_2 et D_6 :

$$u_2^{(0)} = -\frac{F_2 Z}{8\Delta h^2} a_1^4 + A_1 a_1^3 + B_1 a_1^2 + C_1 a_1 + D_1$$

$$u_2^{(1)} = \frac{F_2}{\Delta} \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z} - \frac{3Z_3}{2} \right) a_1 + D_2$$

$$u_2^{(2)} = \frac{3F_2 Z_1}{4\Delta h^2} a_1^2 - \frac{3Z_1 A_1}{Z} a_1 + c_{26} \frac{F_2 Z_2}{2Z^2} - \frac{c_{66} F_2}{4Z} - \frac{c_{66} q}{4Zh} + \frac{F_2 Z_1}{2Z} \left(\frac{3Z_4}{2} - \frac{Z_2^2}{Z} \right) - \frac{B_1 Z_1}{Z}$$

$$u_2^{(3)} = \frac{F_2}{2h^2 \Delta} \left(Z_3 - \frac{Z_1 Z_2}{Z} \right) a_1 - \frac{A_1}{Z^2} (ZZ_3 - 2Z_1 Z_2)$$

$$u_2^{(4)} = \frac{F_2}{4h^2 Z} \left(-\frac{c_{26} Z_2}{Z} + \frac{Z_1}{2\Delta} \left(\frac{2Z_2^2}{Z} - Z_1 - Z_4 \right) + \frac{c_{66}}{2} \right)$$

$$u_1^{(0)} = -\frac{F_2 Z_2}{4\Delta} a_1^2 + a_1 \left(\frac{Z}{Z_1} D_2 + \frac{c_{66}}{2Z_1} (q_1 + q_2) - \frac{3A_1 h^2}{Z_1} \left(Z_3 - \frac{Z_1 Z_2}{Z} \right) \right) + D_6$$

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} = & -3A_1 a_1^2 + \left(\frac{F_2}{\Delta} \left(\frac{3Z_4}{2} - \frac{Z_2^2}{2} \right) - 2B_1 \right) a_1 - \frac{Z_2}{Z_1} D_2 - \frac{c_{66}(q_1+q_2)}{2ZZ_1} Z_2 \\
& + \frac{3A_1 h Z_2}{ZZ_1} \left(Z_3 - \frac{Z_1 Z_2}{Z} \right) + \frac{c_{26}(q_1+q_2)}{2Z} - C_1 + \frac{3A_1 h^2}{Z^2} (Z_2^2 - ZZ_4) \\
& + \frac{F_2 Z_1}{2\Delta h^2} a_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1^{(2)} = & F_2 \left(-\frac{3Z_2}{4\Delta h^2} + \frac{3c_{26}}{4Z} - \frac{c_{22}Z_2}{2Z^2} - \frac{Z_1 Z_2}{2Z\Delta} + \frac{3Z_3}{4\Delta} - \frac{Z_2}{2\Delta} \left(\frac{3Z_4}{2} - \frac{Z_2^2}{Z} \right) \right) + \frac{B_1 Z_2}{Z} \\
& + \frac{3A_1 Z_2}{Z} a_1
\end{aligned}$$

$$u_1^{(3)} = \frac{F_2}{2\Delta h^2} \left(\frac{2Z_2^2}{Z} - Z_1 - Z_4 \right) (a_1 + A_1)$$

$$u_1^{(4)} = \frac{F_2}{4h^2} \left(-\frac{Z_3}{2\Delta} - \frac{c_{26}}{2Z} + \frac{c_{22}Z_2}{Z^2} + \frac{Z_2}{2Z} \left(3Z_1 - \frac{2Z_2^2}{Z} + Z_4 \right) \right)$$

B - CAS DU PLAN (a_1, a_2)

D'après les relations (III-15), les composantes d'ordre n des déplacements produits par l'action du plan P' s'écrivent :

$$u_2'(0) = - \frac{F_2 Z}{8\Delta' h^2} (R^2 - r_0^2)^2$$

$$u_2'(1) = \frac{F_2}{\Delta'} \left(\frac{Z_1' Z_2'}{Z'} - \frac{3Z_3'}{2} \right) r_0 \cos(\phi - \lambda) + \frac{c_{66}'}{2Z'} (q_1 + q_2)$$

$$u_2'(2) = \frac{F_2}{2} \left(\frac{3Z_1'}{2\Delta' h^2} (R^2 - r_0^2) + \frac{c_{26}'}{Z'^2} - \frac{3c_{66}'}{2Z'} + \frac{Z_1'}{Z'\Delta'} \left(\frac{3Z_4'}{2} - \frac{Z_2'^2}{Z'} \right) \right)$$

$$u_2'(3) = \frac{F_2}{2\Delta' h^2} \left(Z_3' - \frac{2Z_1' Z_2'}{Z} \right) r_0 \cos(\phi - \lambda)$$

$$u_2'(4) = \frac{F_2}{4h^2 Z'} \left(- \frac{c_{26}'}{Z'} + \frac{Z_1'}{2\Delta'} \left(\frac{2Z_2'^2}{Z'} - Z_1' - Z_4' \right) + \frac{c_{66}'}{2} \right)$$

$$u_1'(0) = - \frac{F_2 Z_2'}{4\Delta'} (R^2 - r_0^2)$$

$$u_1'(1) = \frac{F_2}{\Delta'} \left(\left(\frac{3Z_4'}{2} - \frac{Z_2'^2}{2} \right) r_0 \cos(\phi - \lambda) - \frac{Z_1'}{2h^2} r_0 \cos(\phi - \lambda) (R^2 - r_0^2) \right)$$

$$u_1'(2) = \frac{F_2}{2} \left(\frac{Z_2'}{2\Delta' h^2} (R^2 - r_0^2 \sin^2(\phi - \lambda) - 3r_0^2 \cos^2(\phi - \lambda) + \frac{3c_{26}'}{2Z'} - \frac{c_{22}'}{Z'^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{Z'\Delta'} \left(\frac{3}{2} Z'Z_3' - Z_1'Z_2' - \frac{3Z_2'Z_4'}{2} + \frac{Z_2'^3}{Z} \right) \right)$$

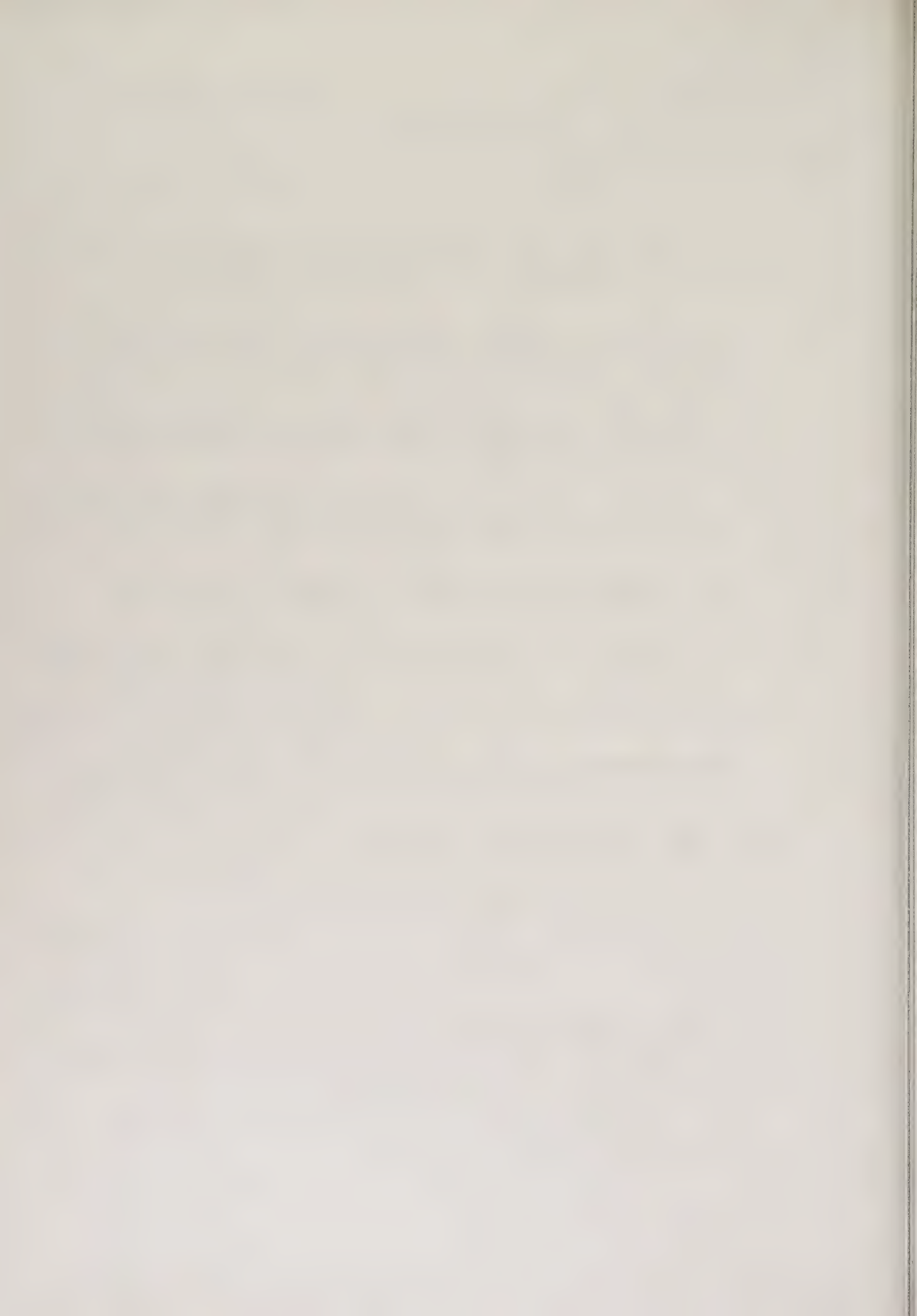
$$u_1'(3) = \frac{F_2}{2\Delta' h^2} \left(2 \frac{Z_2'^2}{Z'} - Z_1' - Z_4' \right) r_0 \cos(\phi - \lambda)$$

$$u_1'(4) = \frac{F_2}{4h^2} \left(\frac{c_{22}'}{2Z'^2} - \frac{Z_3'}{2\Delta'} - \frac{c_{26}'}{Z'} - \frac{Z_2'}{2Z'\Delta'} \left(3Z_1' - \frac{2Z_2'^2}{Z'} + Z_4' \right) \right)$$

Dans ces relations : $r_0 \cos(\phi - \lambda) = a_1 \cos \phi + a_3 \sin \phi$

B I B L I O G R A P H I E

- (1) J.F. DIAS, H.E. KARRER, "Stress effects in acoustic surface wave circuits and applications to pressure and force transducers", 1974, IEEE International Solid-State Circuits Conference.
- (2) P. LEVESQUE, M. VALDOIS, D. HAUDEN, J.J. GAGNEPAIN, P. HARTEMANN, J. UEBERSFELD, "Theoretical and experimental analysis of SAW quartz oscillator acceleration sensitivity", 1979, Ultrasonics Symposium Proceedings IEEE, cat. 79 CH1482-9SU.
- (3) D. HAUDEN, "Etude des propriétés non linéaires des ondes élastiques de surface : application aux oscillateurs et capteurs à quartz", Thèse, juin 1979, Besançon.
- (4) D. HAUDEN, S. ROUSSEAU, J.J. GAGNEPAIN, P. HARTEMANN, "Etude de l'utilisation des oscillateurs à ondes élastiques de surface comme capteurs de pression et de force". Rapport DGRST, 1979.
- (5) R.N. THURSTON, "Wave propagation in fluids and normal solids", 1964, Physical Acoustics, vol. 1A, Academic Press, N.Y.
- (6) H.F. TIERSTEN, B.K. SINHA, "A perturbation analysis of the attenuation and dispersion of surface waves", J. Appl. Phys., 49, jan. 1978.
- (7) R.D. MINDLIN, "An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates", Monograph USASCEL, Fort Monmouth, N.J., 1955.
- (8) T.M. REEDER, D.E. CULLEN, M. GILDEN, "SAW oscillator pressure sensors", 1975, Ultrasonics Symposium Proceedings IEEE, cat. 75 CH0994-4SU.
- (9) A.E.H. LOVE, "A treatise on the mathematical theory of elasticity", 1944, Dover Publications Inc., N.Y.
- (10) S. TIMOSHENKO, "Theory of plates and shells", 1959 International Student Edition - Tokyo.
- (11) M. DESJARDINS, "Les capteurs de mesure", La Documentation Française 1975.
- (12) Tables de Landolt-Börnstein, "Numerical Data and functional relationships in Science and Technology", groupe III, vol. 2.
- (13) M. MICHEL, "Etude des propriétés thermiques des lignes à retard à ondes de surface", Thèse, 1977, Besançon.
- (14) E. DIEULESAINT, D. ROYER, "Ondes élastiques dans les solides", 1974, Editions Masson et Cie, Paris.



Vu et permis d'imprimer
Besançon, le

Pour le Président de l'Université
Le Doyen de la Faculté des Sciences et des Techniques,

J. BULABOIS

